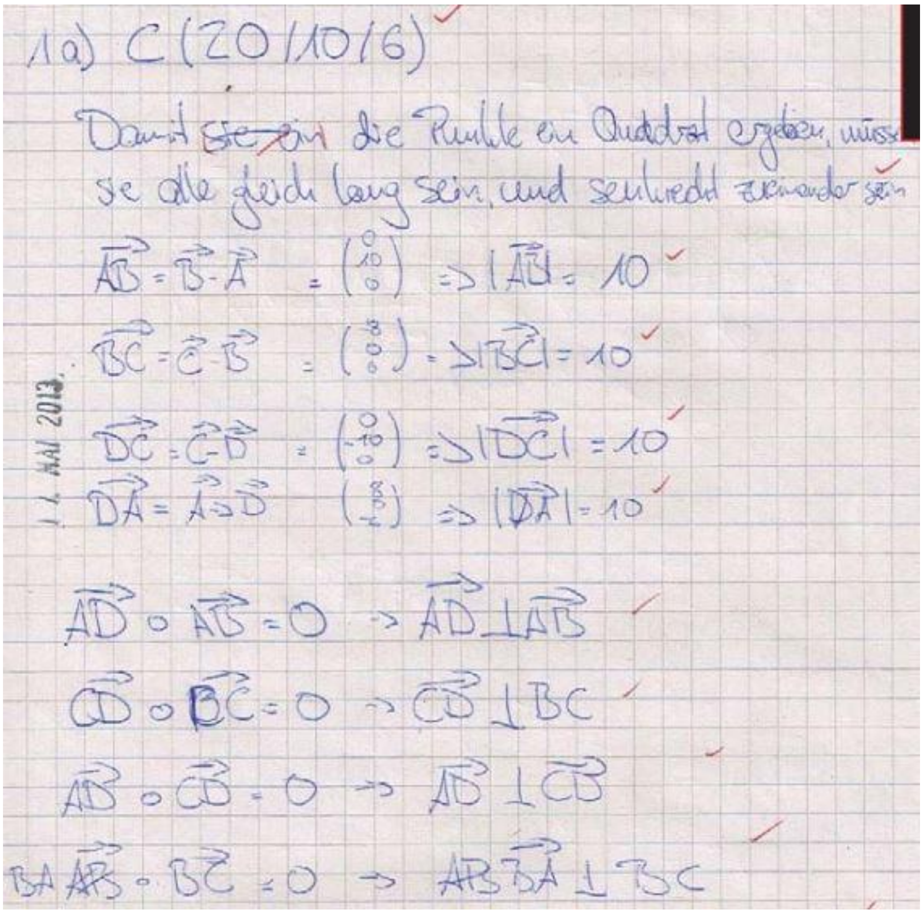
Anlage 3

Die Abiturprüfung 2013 – Analyse von Schülerlösungen – dokumentiert von Nora Bender im Rahmen ihrer Hausarbeit im Fach Mathematik an der Universität Würzburg

Teilgebiet Geometrie – Aufgabengruppe I

Aufgabe a)

Beim Nachweisen der Eigenschaften eines Quadrats haben zwei Drittel der Abiturienten vergessen zu überprüfen, ob das Quadrat auch rechtwinklig ist. Es ist jedoch deutlich zu sehen, dass die Schüler für ihre Überprüfungen mit dem CAS gearbeitet haben. Um die Länge der Seiten des Quadrats zu bestimmen, mussten diese jeweils normiert werden. Dies ist nicht sehr schwierig, einzig die Eingabe aller Punkte in das CAS ist zeitaufwendig. Der Nachweis, ob die Seiten senkrecht aufeinander stehen, erfolgt mittels Skalarprodukt. Die nachfolgende Abbildung 27 zeigt eine Arbeit, bei der der Rechnereinsatz deutlich wird. Es werden alle Schritte kurz und prägnant dargestellt und eine Rechnung ist nicht zu sehen.



1a) C(20/10/6)

Damit ~~sie~~ die Punkte ein Quadrat ergeben, müssen sie alle gleich lang sein, und senkrecht zueinander sein

$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A} = \begin{pmatrix}0\\10\\0\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{AB}| = 10$

$\vec{BC} = \vec{C} - \vec{B} = \begin{pmatrix}8\\0\\6\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{BC}| = 10$

$\vec{DC} = \vec{C} - \vec{D} = \begin{pmatrix}0\\-10\\0\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{DC}| = 10$

$\vec{DA} = \vec{A} - \vec{D} \quad \begin{pmatrix}8\\0\\-6\end{pmatrix} \Rightarrow |\vec{DA}| = 10$

$\vec{AD} \circ \vec{AB} = 0 \rightarrow \vec{AD} \perp \vec{AB}$

$\vec{CD} \circ \vec{BC} = 0 \rightarrow \vec{CD} \perp BC$

$\vec{AB} \circ \vec{CB} = 0 \rightarrow \vec{AB} \perp \vec{CB}$

$BA\ \cancel{\vec{AB}} \circ \vec{BC} = 0 \rightarrow \cancel{AB}\ \vec{BA} \perp BC$

Abbildung 1: Schülerarbeit 2 zu Geometrie I Aufgabe a) (interne Quelle).

In keiner Schülerlösung wurde explizit der Befehl zur Berechnung des Skalaprodukts erwähnt.

Aufgabe b)

Die Ebenengleichung wurde von allen Abiturienten richtig ermittelt. Alle Lösungen enthielten wie zuvor schon keine konkreten CAS-Befehle. Wie aus der folgenden Abbildung 28 ersichtlich wird, wurde das CAS zur Berechnung der Normalenform mittels Kreuzprodukt eingesetzt. Die Ebenengleichung wurde dann mittels eines Gleichungssystems aufgestellt und mit dem Rechner gelöst. Die Befehle für das CAS wurden auch hier nicht notiert, sind aber der Musterlösung im Anhang zu entnehmen.

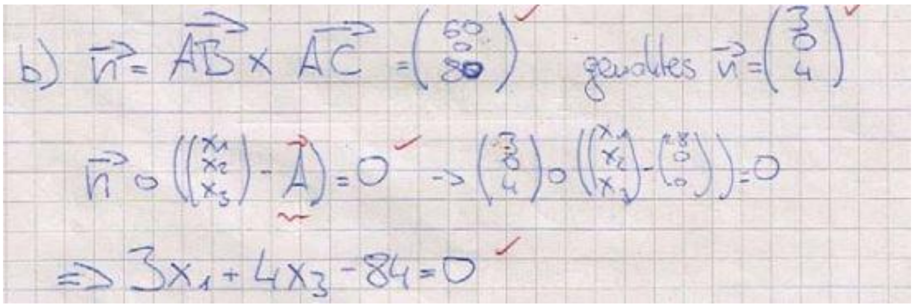
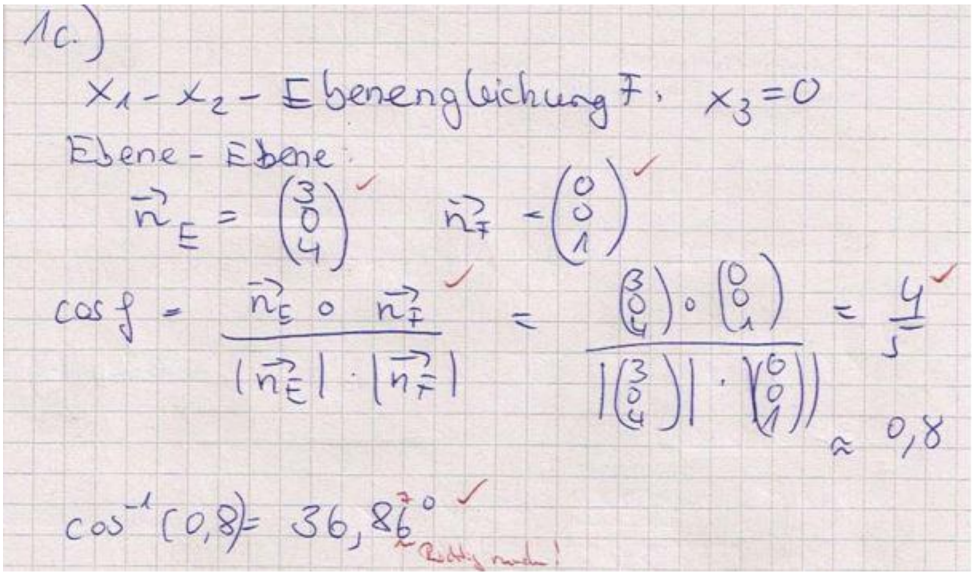


Abbildung 2: Schülerarbeit 2 zu Geometrie I Aufgabe b) (interne Quelle).

Aufgabe c)

Auch der Neigungswinkel wurde in allen Arbeiten richtig berechnet. Die Schüler konnten den Normalenvektor der Ebene E aus Teilaufgabe b) verwenden und haben den Normalenvektor für die Ebene F richtig erkannt. In allen Arbeiten wurde die Formel zur Berechnung des Winkels richtig dargestellt und mittels Eingabe in das CAS haben alle Abiturienten den richtigen Winkel berechnet. Abbildung 29 verdeutlicht dies. Insgesamt wurde Teilaufgabe c) sehr zufriedenstellend bearbeitet.



1c.)

$x_1 - x_2$ - Ebenengleichung F: $x_3 = 0$

Ebene - Ebene:

$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\cos f = \frac{\vec{n}_E \circ \vec{n}_F}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{4}{5} \approx 0,8$

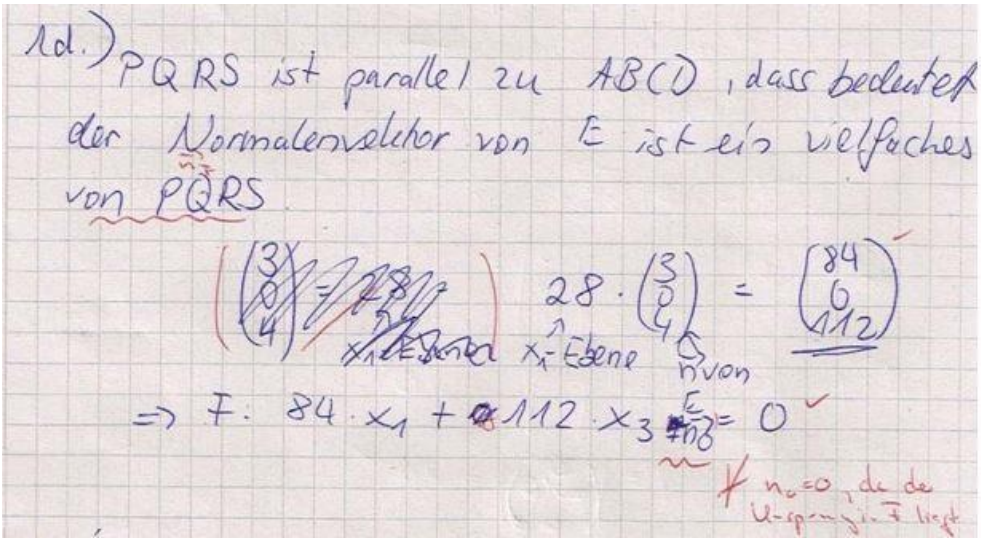
$\cos^{-1}(0,8) = 36,87°$

Richtig runden!

Abbildung 3: Schülerarbeit 4 zu Geometrie I Aufgabe c) (interne Quelle).

Aufgabe d)

Diese Aufgabe wurde eher durchschnittlich bearbeitet. Hier konnten die Abiturienten keine sicheren Punkte für Berechnungen mit dem CAS erreichen, denn die Normalenform der Ebene F sollte *„ohne zu rechnen“* (ISB, 2013d, S. 14) dargestellt werden. Die meisten Schüler haben erkannt, dass die Seitenfläche PQRS parallel zu ABCD ist. Das bedeutet, dass der Stützpunkt im Ursprung liegt und $n_E = n_F$ gilt. Diese Eigenschaft wurde nicht von allen erkannt (vgl. Abbildung 30). Folglich wurde das Vorgehen für das Bestimmen der Ebenengleichung F nicht von allen Abiturienten exakt beschrieben. So waren auch die aufgestellten Gleichungen selbst fehlerhaft.



1d.) PQRS ist parallel zu ABCD, dass bedeutet der Normalenvektor von E ist ein vielfaches von $\vec{n}_F$ PQRS

$28 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84 \\ 0 \\ 112 \end{pmatrix}$

x_1-Ebene

$\vec{n}$ von E

$\Rightarrow F: 84 \cdot x_1 + 112 \cdot x_3 = 0$

$n_0 = 0$, da der Ursprung in F liegt

Abbildung 4: Schülerarbeit 4 zu Geometrie I Aufgabe d) (interne Quelle).

Aufgabe e)

Der Rechner konnte hier wie in der vorherigen Aufgabe nicht eingesetzt werden. Es geht bei dieser Aufgabe ausschließlich um Verständnis und Vorstellungsvermögen. So hatte nur ein Drittel der Schüler die richtige Lösung zur Berechnung des Volumens. Fehler lagen bei kleinen Ungenauigkeiten in den Formulierungen. So wurde in einer Arbeit folgendes geantwortet: *„[...] Das Volumen beider Körper zusammen ist das gleiche Volumen, wie wenn in den Körper kein Einschnitt vorgenommen wird.“* (interne Quelle). Der Schüler meinte wahrscheinlich die richtige Lösung, nämlich das Addieren eines abgeschnittenen Prismas an das andere Ende des Spats, die Formulierung ist aber sehr unsauber. Die folgende Schülerlösung (Abbildung 31) zeigt einen weiteren Lösungsansatz, das Volumen zu berechnen.

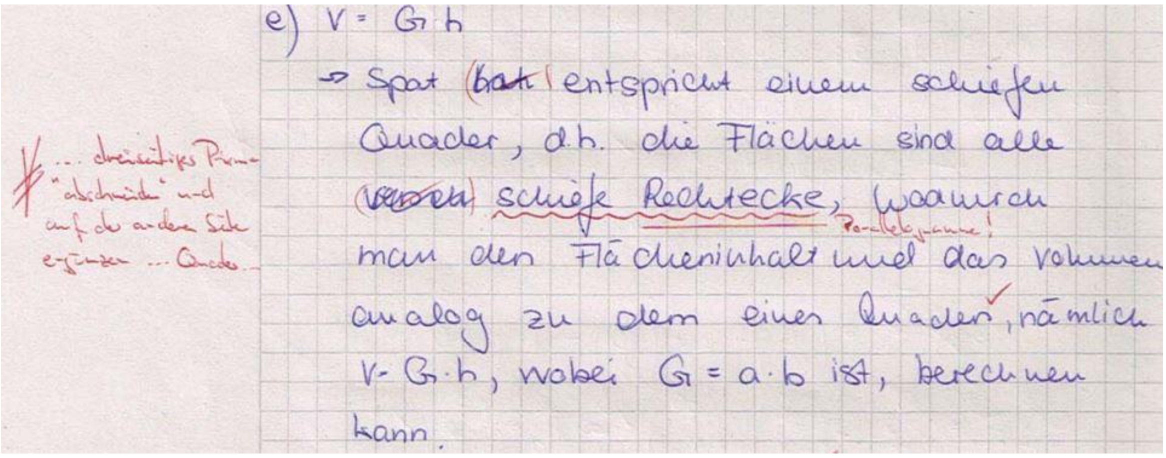


Abbildung 5: Schülerarbeit 8 zu Geometrie I Aufgabe e) (interne Quelle)

Der Ausdruck *„schiefe Rechtecke“* (vgl. Abbildung 31) weist auf ein geringes mathematisches Fachvokabular hin. Dies ist nur ein Beispiel für diese Tatsache aus der Gesamtheit aller Lösungen.

Aufgabe f)

Viele Schüler haben hier wahrscheinlich ohne das CAS gerechnet, da das Ergebnis schnell im Kopf zu berechnen war (vgl. Abbildung 32).

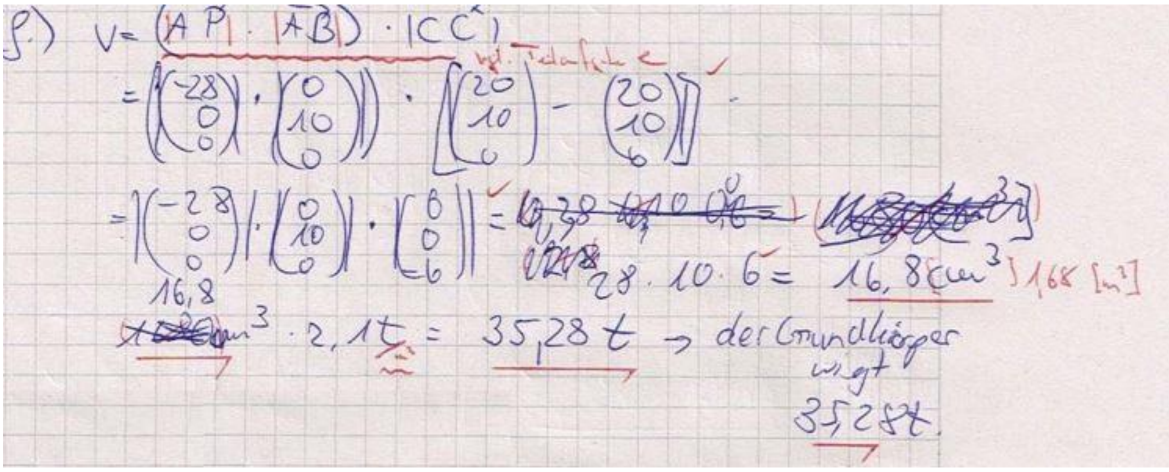


Abbildung 6: Schülerarbeit 6 zu Geometrie I Aufgabe f) (interne Quelle).

Auffallend bei dieser Teilaufgabe ist, dass über die Hälfte der Abiturienten Probleme mit der Umwandlung in die richtige Einheit hatten. Es gibt nur wenige Arbeiten, in denen das Ergebnis richtig in Kubikmeter umgewandelt wurde. Diese Tatsache bliebe aber auch durch den CAS-Einsatz unverändert.

Aufgabe g)

Diese Aufgabe wurde mit durchschnittlichem Erfolg von den Abiturienten gelöst. In fast allen Arbeiten konnte die Gleichung der Geraden h angegeben werden. So wurden der hierfür benötigte Mittelpunkt und der Richtungsvektor meist korrekt angegeben. Um die Koordinate für die Bohrung richtig anzugeben, musste der Richtungsvektor normiert werden. Leider ist nur ein Schüler auf diese Weise vorgegangen und folglich gab es bei dieser Teilaufgabe nur eine völlig korrekte Lösung. Fehler bei der Normierung des Richtungsvektors traten bei zwei Drittel der Arbeiten auf.

Die neuen Informationen, die vor Teilaufgabe g) eingeführt werden, sind sehr kompliziert dargelegt, sodass die Abiturienten wahrscheinlich aus diesem Grund vergessen haben, die Längeneinheiten anzupassen. Der CAS-Rechner hilft auch an dieser Stelle bei den Berechnungen.

Die nachfolgende Abbildung 33 zeigt die zuvor beschriebenen Fehler.

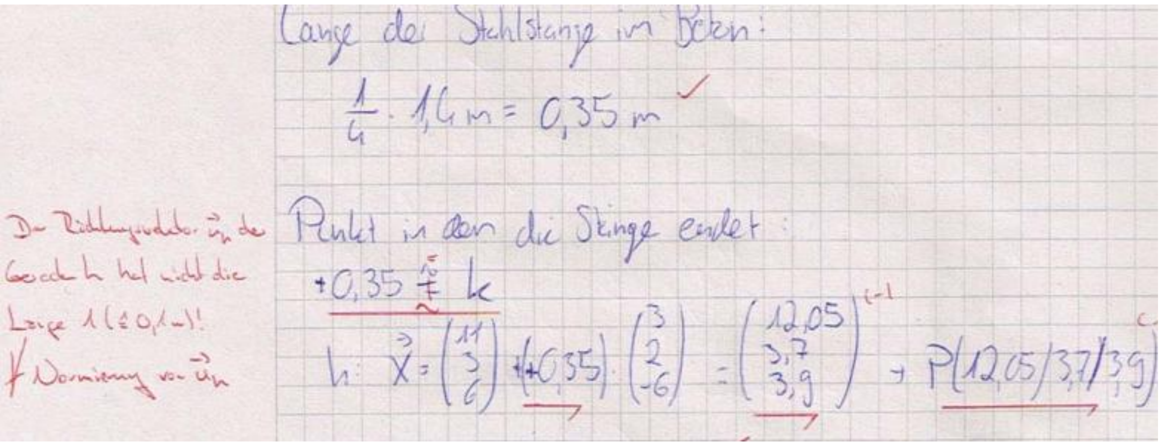


Abbildung 7: Schülerarbeit 6 zu Geometrie I Aufgabe g) (interne Quelle).

Aufgabe h)

Teilaufgabe h) hingegen fiel um einiges besser aus, da die Berechnung des Neigungswinkels schon in Teilaufgabe c) abgefragt wurde. In einigen Arbeiten wurde der Neigungswinkel mit der Formel $\sin\varphi = \frac{e \circ v_h}{e \ \cdot \ v_h}$ berechnet und in anderen Arbeiten mit der Formel $\cos\varphi = \frac{e \circ v_h}{e \ \cdot \ v_h}$. Wurde Letztere verwendet, so vergaßen Schüler sehr häufig den errechneten Wert von 90° abzuziehen. Wieder andere rundeten falsch. Scheinbar gab es auch bei der Eingabe in das CAS Schwierigkeiten. So ist aus Abbildung 34 zu erkennen, dass beide Vektoren und die Formel nahezu richtig waren, allerdings stellt sich die Frage wie der Wert $2{,}6°$ zu Stande kam.

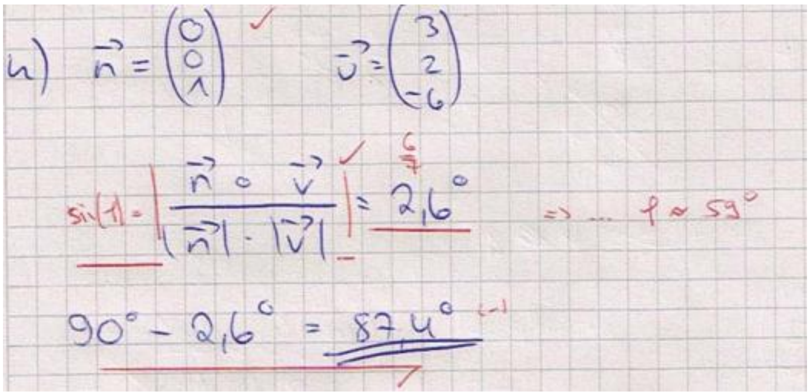
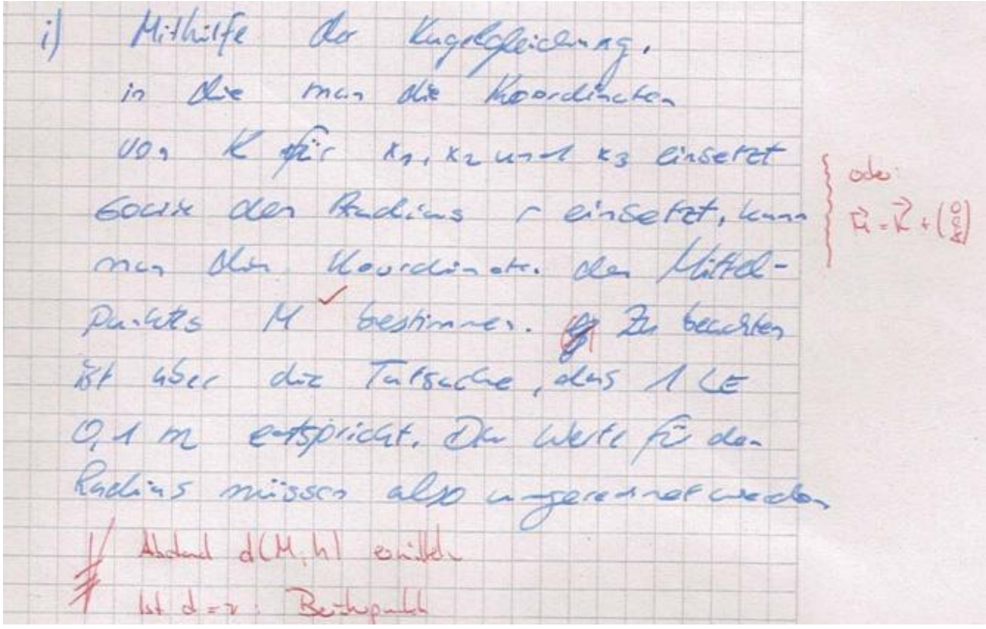


Abbildung 8: Schülerarbeit 1 zu Geometrie I Aufgabe h) (interne Quelle).

In den meisten Arbeiten wurde offensichtlich das Computer-Algebra-System zum Berechnen genutzt und es waren nur selten Nebenrechnungen für Kreuzprodukt und Skalarprodukt in den Lösungen zu finden.

Aufgabe i)

Diese Teilaufgabe ist eine Verständnisaufgabe und daher war der Rechnereinsatz nicht nötig. Aufgabe i) wurde dennoch im Durchschnitt gut bearbeitet. Meist wurde erkannt, dass zunächst die Kugelgleichung aufgestellt werden muss und man dann den Mittelpunkt M der Kugel berechnen kann. Oft fehlte hier, die explizite Darstellung von M mit $M = K + \begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$. Bei weiteren Schülerlösungen wurde der Abstand $d(M; h)$ vernachlässigt und folglich auch der Berührpunkt im Fall $d = r$ nicht betrachtet, wie Abbildung 35 verdeutlicht.



i) Mithilfe der Kugelgleichung, in die man die Koordinaten von K für x_1, x_2 und x_3 einsetzt sowie den Radius r einsetzt, kann man die Koordinaten des Mittelpunkts M bestimmen. Zu beachten ist aber die Tatsache, dass 1 LE 0,1 m entspricht. Die Werte für den Radius müssen also umgerechnet werden.

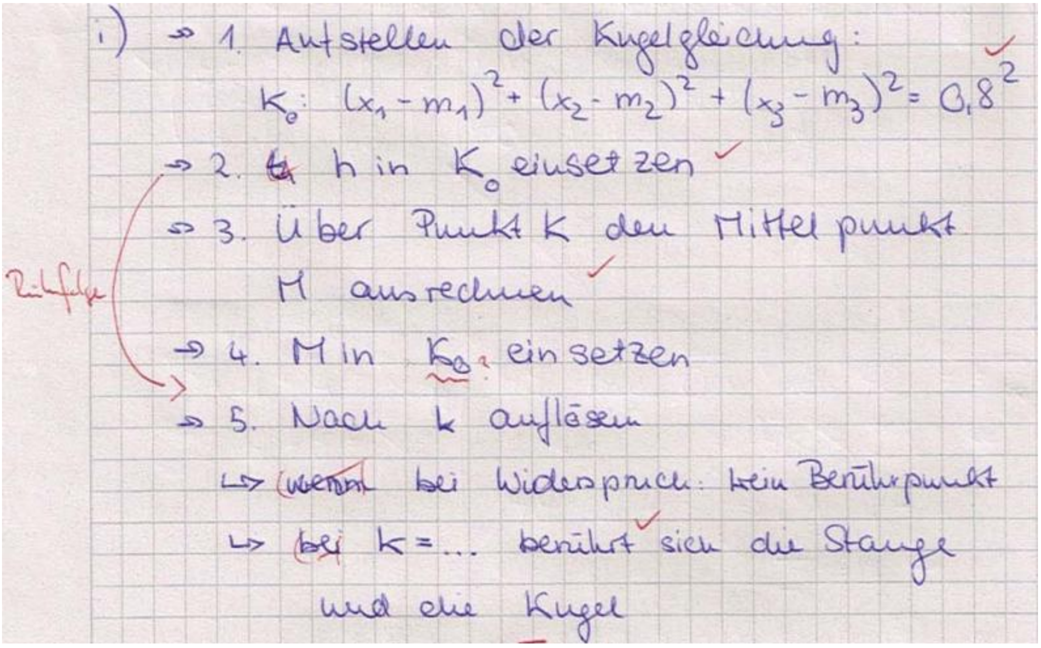
oder: $\vec{M} = \vec{K} + \begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$

Abstand d(M,h) ermitteln

Ist d = r: Berührpunkt

Abbildung 9: Schülerarbeit 7 zu Geometrie I Aufgabe i) (interne Quelle).

Ungenauigkeiten gab es wie bei allen Verständnisaufgaben zuvor schon im mathematischen Sprachgebrauch. Die vage Vorstellung des Gebildes, die man durch die Angabe bekommt, führte dazu, dass in manchen Arbeiten kein Lösungsbeitrag gegeben werden konnte oder sogar die Aufgabe nicht bearbeitet wurde. Trotzdem gab es einige sehr schöne Lösungen (vgl. Abbildung 36).



i) ⇒ 1. Aufstellen der Kugelgleichung:

K_0: $(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = 0{,}8^2$

⇒ 2. h in K_0 einsetzen

⇒ 3. Über Punkt K den Mittelpunkt M ausrechnen

⇒ 4. M in K_0 einsetzen

⇒ 5. Nach k auflösen

↳ ~~wenn~~ bei Widerspruch: kein Berührpunkt

↳ ~~bei~~ k = ... berührt sich die Stange und die Kugel

Reihenfolge

Abbildung 10: Schülerarbeit 8 zu Geometrie I Aufgabe i) (interne Quelle).