Profit ohne Risiko, Geld für umsonst - geht das?

Prof. Dr. Tom Fischer
Institut für Mathematik
Universität Würzburg

∼

wümax Mathe-Seminar
27. Januar 2025

Profit ohne Risiko, Geld für umsonst - geht das?

Auf der Suche nach einer Antwort werden anhand einfacher Beispiele wichtige Grundprinzipien der Finanzwelt illustriert:

- Warum können die Zinssätze auf der anderen Seite des Atlantiks eine Rolle hier in Deutschland spielen?
- Was haben Finanzmärkte zum einem mit Lotto und zum anderen mit fairen Spielen zu tun?
- Was kann es bedeuten, wenn eine Bank höhere Zinsen gibt als eine andere?
- Wieso bestimmt bei Aktien der Preis einer Kaufoption zugleich auch den Preis der zugehörigen Verkaufsoption?
- Und was ist eigentlich Finanz*mathematik*?

Absicht des Vortrags ist es, Einblicke in die Spielregeln des globalen Finanzcasinos und in die dahinter liegende Wissenschaft zu geben.

Geld für umsonst - ein Menschheitstraum

- Vor der Theke beim Bäcker liegt .[1] $\checkmark$
- Auf dem Gehweg liegen 

. $\checkmark$
- Auf dem Gehweg liegen 

. **Vorsicht:** § 965 und § 971 BGB
  Ablieferungspflicht ($\geq$ €10,00)
  5% Finderlohn $=$ €2,50
- Oma schenkt 

. $\checkmark$
- Onkel aus USA schenkt 

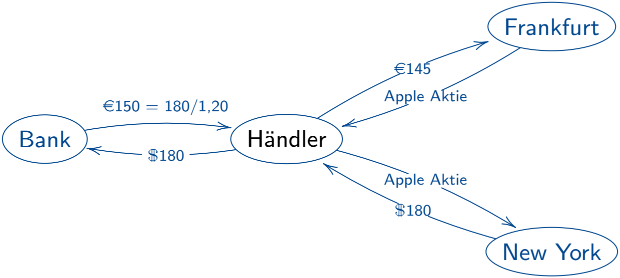
. $\checkmark$

$\boxed{\textbf{Sofortbetrag (ohne Risiko)}}$

[1] Bildquellen: Münze – Verfasser. Noten – EZB, CNN/Money.

Beispiel: Zwei Finanzmärkte - Frankfurt / New York City

- **Apple Aktie** handelt an der Frankfurter Börse für €145.
- Apple Aktie handelt an der NASDAQ für \$180.
- **€1,00 $\widehat{=}$ \$1,20**, €150 $\widehat{=}$ \$180
- **Idee:** Kaufe Aktie in Frankfurt, verkaufe sofort in New York!



Händler/Computer macht €5 Sofortgewinn.
= Geld für umsonst!

Bemerkungen

- 1 Million Aktien $\Rightarrow$ €5.000.000 Sofortgewinn!
- Strategie funktioniert, weil

$$145 \overset{\text{kleiner}}{<} 150 \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1{,}20 = \frac{180}{150} < \frac{180}{145} \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{Wechselkurs \$/€1} < \frac{\text{\$-Aktienkurs New York}}{\text{€-Aktienkurs Frankfurt}}. \tag{3}$$

- weil New York teurer als Frankfurt, bzw.
- weil Dollar zu teuer im Vgl. zum Euro (zu wenig Dollars pro Euro).

Wenn alle das machen...

- steigt die Nachfrage / der Preis in Frankfurt.
- steigt das Angebot / fällt der Preis in New York.
- steigt das Angebot von Dollars / steigt der Wechselkurs \$/€1

$$\text{Wechselkurs \$/€1} \nearrow \quad < \quad \underbrace{\frac{\text{\$-Aktienkurs New York} \searrow}{\text{€-Aktienkurs Frankfurt} \nearrow}}_{\searrow}. \tag{4}$$

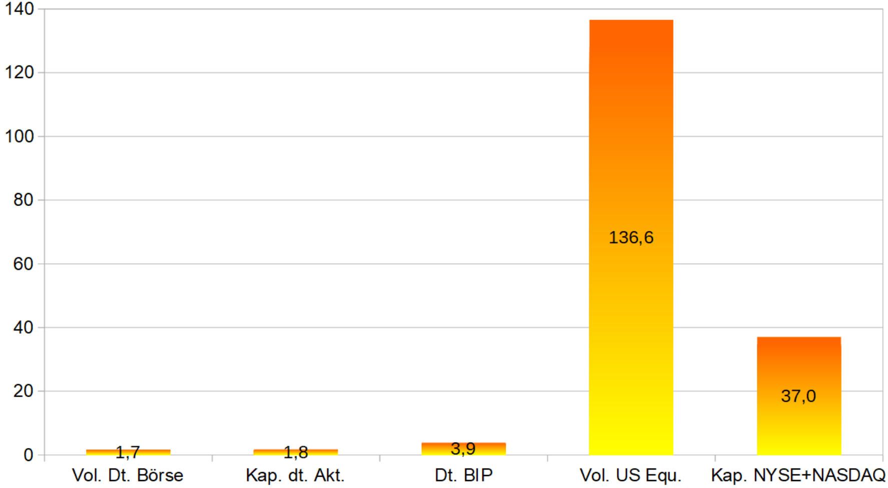
$\Rightarrow$ **"Geld für umsonst" verschwindet:**

$$\boxed{\text{Wechselkurs \$/€1} \quad = \quad \frac{\text{\$-Aktienkurs New York}}{\text{€-Aktienkurs Frankfurt}}} \tag{5}$$

Gesetz der Unterschiedslosigkeit der Preise ("*Law of One Price*")

- Aktien kosten (umgerechnet) in allen Märkten gleich viel.
  (Märkte dürfen nicht abgeschottet sein, "Globalisierung".)
- Handelsgebühren & Steuern $\Rightarrow$ (kleine) Preisdifferenzen möglich.

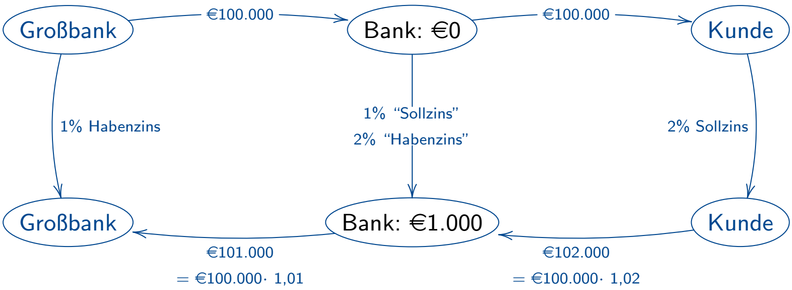
2022 in Billionen Euro (€1.000.000.000.000)



Daten: Deutsche Börse, Statista, Cboe, WFE.

Beispiel: **Refinanzierung einer Bank**

- leiht sich im EURIBOR-Markt Geld zu **1% für ein Jahr**. (1,01 = 1+1%)
- verleiht in Konsumentenkredit Geld zu **2% für ein Jahr**. (1,02 = 1+2%)



$\Rightarrow$ **garantierter Betrag in der Zukunft** ?

(Könnte umgewandelt werden in Sofortbetrag.)

Gibt es das in Finanzmärkten?

- Beachte: **Operative Kosten/Kreditrisiko/Profit**.
- Reales Risiko: Kunde zahlt nicht ⇒ €101.000 Verlust für Bank.
  Zukünftiger Betrag nicht garantiert bzw. nicht ohne Risiko.
- **Möglich:** Kunde zahlt 1% mehr für Kredite, weil er ca. alle $1/1\% = 1/0{,}01 = 100$ Jahre ausfällt ("**credit spread**").

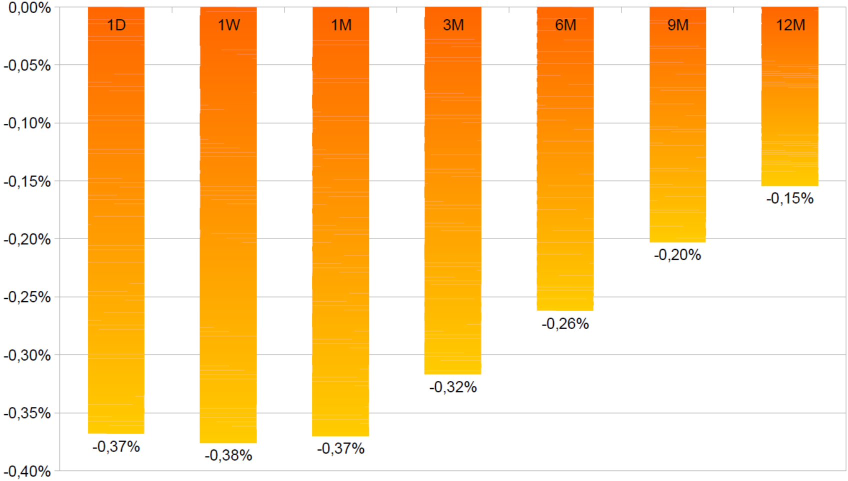
⇒ Profit für die Bank

- im Durchschnitt. ✓
- **nicht ohne Risiko**, im Einzelfall **nicht garantiert!** ✖

⇒ **Finanzdienstleistung!**

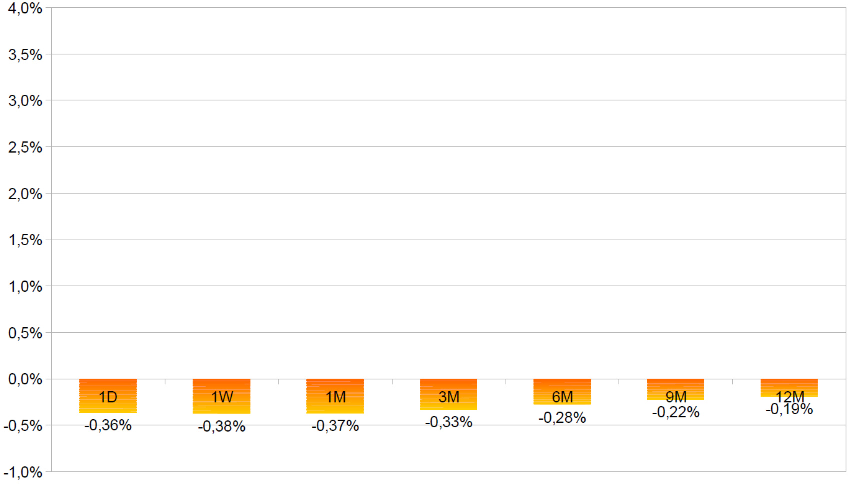
- Bemerkung: Wenn eine Bank im Refinanzierungsmarkt mehr zahlt, gibt sie vielleicht auch mehr für Einlagen...
  ⇒ Kunde trägt u.U. Kreditrisiko der Bank.

EURIBOR am 19.10.2018



Daten: Deutsche Bundesbank.

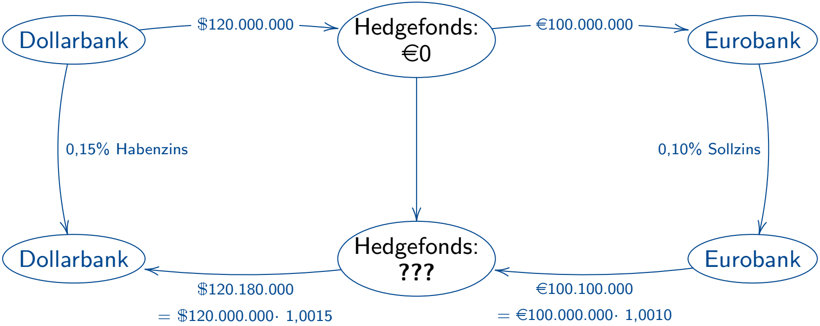
EURIBOR am 19.10.2018



Daten: Deutsche Bundesbank.

Beispiel: **Hedgefonds**

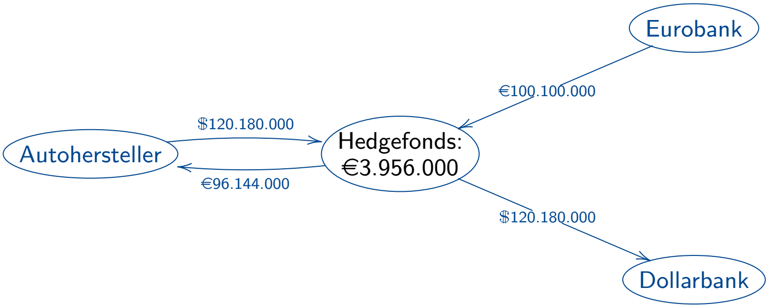
- leiht von **Dollarbank** \$120.000.000 zu **0,15% für ein Jahr**.
- verleiht an **Eurobank** €100.000.000 zu **0,10% für ein Jahr**.
- **€1,00** $\widehat{=}$ **\$1,20** zum Anfangszeitpunkt.



Zusätzliches **Termingeschäft** („*forward contract*"):

- Hedgefonds hat **Autohersteller** versprochen, in einem Jahr \$120.180.000 gegen €96.144.000 zu tauschen.

$\Rightarrow$ $\frac{120.180.000}{96.144.000} = 1{,}25$, d.h. **€1,00 $\widehat{=}$ \$1,25 in einem Jahr**.



$\Rightarrow$ Hedgefonds macht aus €0 ein Jahr später €3.956.000.

- Strategie funktioniert, weil

$$
\begin{aligned}
& 100.100.000 \overset{\text{größer}}{>} 96.144.000 && (6)\\
\Leftrightarrow\ & \frac{120.180.000}{96.144.000} > \frac{120.180.000}{100.100.000} && (7)\\
\Leftrightarrow\ & 1{,}25 > \frac{120.000.000 \cdot 1{,}0015}{100.000.000 \cdot 1{,}0010} = 1{,}20\frac{1+0{,}15\%}{1+0{,}10\%}. && (8)
\end{aligned}
$$

- Wenn alle das machen, steigen Dollarzinssätze, fallen Eurozinssätze, steigt Wechselkurs \$/€1 jetzt, fällt Wechselkurs \$/€1 in einem Jahr.

⇒ **“Geld für umsonst” verschwindet:**

$$
\boxed{\frac{\text{Wechselkurs \$/€1 in einem Jahr}}{\text{Wechselkurs \$/€1 jetzt}} = \frac{1 + \text{Dollarzinssatz}}{1 + \text{Eurozinssatz}}} \qquad (9)
$$

Zinsparität

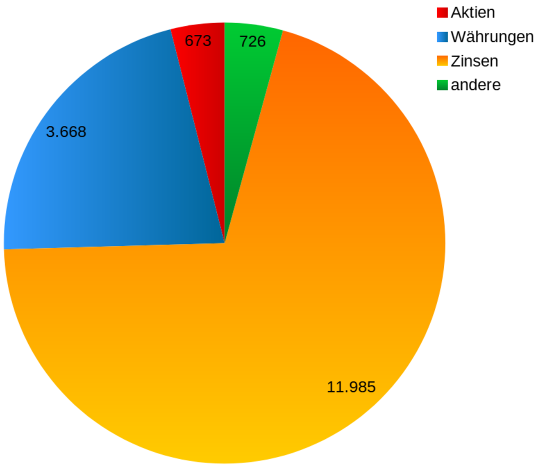
⇒ Kennt man drei der vier Werte, kennt man alle!

⇒ **Währungskurse und internationale Zinssätze hängen mathematisch voneinander ab.** (Formeln, Finanz*mathematik*)

- Beachte: Termingeschäfte sind **Derivate**.

Außerbörslich gehandelte Derivate, 1. Halbjahr **2024** (global)

"*Gross market value*" in Milliarden U.S.-Dollars.



Marktwert aller außerbörslichen Derivate = **$17.052.000.000.000.**
Daten: Bank für Internationalen Zahlungsausgleich (BIZ/BIS).

- Auf dem Gehweg vor dem Kiosk liegt 

.[2]
  Annahme: Ziehung steht noch bevor.

- Zwei Möglichkeiten in der Zukunft:

  1. Gewinn.
  2. Kein Gewinn.

- Chance auf Gewinn ist echt – jeder kennt einen (Klein-)Gewinner.

- Kein Risiko (keine Verlustmöglichkeit).

$\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{Gewinnchance (ohne Risiko)}}$

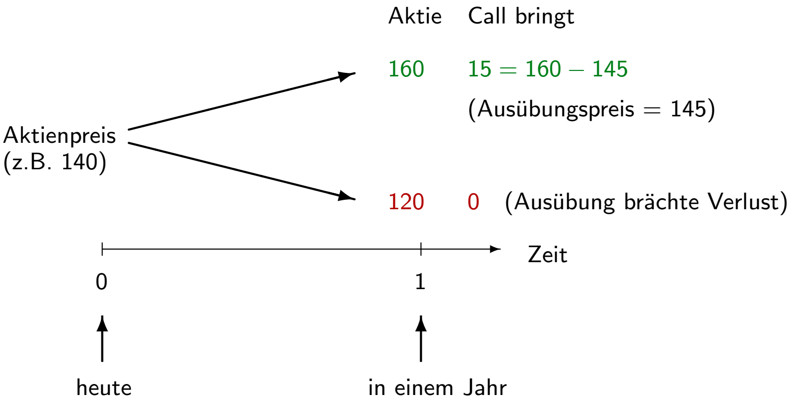
- Unterschied zu den bisherigen deterministischen Beispielen:
  Zufall bzw. *Stochastik* kommt ins Spiel.

[2] Bildquelle: LOTTO Baden-Württemberg.

Beispiel Kaufoption ("*call option*")

- Garantiert das Recht, in einem Jahr eine Apple Aktie zum **Ausübungspreis** €145 zu kaufen.
- Recht, **keine Pflicht**, d.h. "Option", optionaler Terminvertrag.
- Option ⇒ **Gewinnchance ohne Verlustrisiko!**
- Kaufoption = Versicherung gegen/Wette auf steigende Preise
- Option = "Derivat" (vom Basiswert "abgeleitet")

Kaufoption: Zwei Möglichkeiten, (stochastisches) Modell



Fall 1: Apple Aktie kostet €160 in einem Jahr.

$\Rightarrow$ Option ausüben, Aktie für €145 kaufen, direkt für €160 verkaufen, €15 Gewinn!

Fall 2: Apple Aktie kostet €120 in einem Jahr.

$\Rightarrow$ Option verfallen lassen (Aktie nicht kaufen), kein Gewinn/kein Verlust.

Ist der Call umsonst?

- Annahme: Eine Investmentbank hat 1.000.000 Calls **verschenkt**.

Fall 1: Muss 1.000.000 Aktien im Wert von €160.000.000 für €145.000.0000 verkaufen. ⇒ €15.000.000 Verlust!

Fall 2: Nichts passiert.

⇒ **Die Kaufoption muss etwas kosten, sonst droht der Bankrott!**
(Lottospielen kostet ja auch etwas.)

Aber: Gekaufte Kaufoption ⇒ Verlustrisiko für Käufer.
(Fall 2: Verlust = Optionspreis)

Was kostet der Call? (Replikation, Hedging)

- **Annahmen:** 0% Zinsen; 1 Apple Aktie kostet heute €140.

- **Übungsaufgabe V1:**
  Man zeige, dass der Wert von 1.000 Calls *in einem Jahr* gleich dem Wert von 375 Aktien zu diesem Zeitpunkt abzüglich einer Zahlung von €45.000 ist. (Tipp: Fallunterscheidung!)
  Bemerkung: *Dies bedeutet, dass 375 Aktien und Schulden von €45.000 zusammen die Auszahlung von 1.000 Call-Optionen* **replizieren***. Eine Bank, die 1.000 Calls emittiert (kreiert & verkauft) hat, kann sich durch ein entsprechendes Portfolio vollständig* **absichern** *("hedging").*

$\Rightarrow$ **Law of One Price:**

$$\begin{aligned} & \text{Preis 1.000 Calls } \textbf{heute} \\ = \; & \text{Wert 375 Aktien} - €45.000 \text{ (kein Zins!)} \\ = \; & 375 \cdot €140 - €45.000 \\ = \; & €52.500 - €45.000 \; = \; €7.500. \end{aligned} \tag{10}$$

$\Rightarrow$ **1 Call kostet €7,50** (modellabhängig, aber unabhängig von vorhandenen Wahrscheinlichkeiten!).

Put-Call-Parität

- Verkaufsoption ("*put option*"):
  Garantiert das Recht, in einem Jahr eine Apple Aktie zum **Ausübungspreis** €145 zu **ver**kaufen.

- Ist eine Verkaufsoption umsonst? **Nein!** (wie beim Call)

- Man kann zeigen:

$$\boxed{\text{Call-Preis - Put-Preis} \quad = \quad \text{Aktienpreis} - \text{Ausübungspreis}} \qquad (11)$$

Put-Call-Parität (ohne Zinsen)

- Kennt man den Call-Preis, so kennt man den zugehörigen Put-Preis und umgekehrt!

- **Übungsaufgabe V2:**
  Zeigen Sie, dass im obigen Beispiel Gleichung (11) gilt. *Betrachten Sie hierzu einen Hedgefonds unter zwei Szenarien: 1 - er besitzt eine Aktie, 2 - er schuldet eine Aktie, und kreieren Sie jeweils in beiden Szenarien aus dem Kauf und/oder Verkauf von Call- und/oder Put-Optionen ein Portfolio, welches im jeweils betrachteten Szenario unter beiden Möglichkeiten der Aktienentwicklung den gleichen Wert liefert.*

Drei Dinge, die jede/r gerne hätte, **ohne etwas dafür zu zahlen:**

- Sofortbetrag (hervorragend!)
- sicherer Betrag in der Zukunft (ziemlich gut!)
- Gewinnchance ohne Risiko (auch gut!)

In der Finanzmathematik oder in der Finanzwissenschaft (*finance, mathematical finance, financial engineering*) nennt man so etwas eine

Arbitrage.

Beispiele bisher: Glück, Zufallsfunde, Geschenke.
Kein Anfangskapital notwendig!
Zu gut, um wahr zu sein!

$$\boxed{\text{Arbitrage} = \text{“gefundes Fressen”} \overset{\text{engl.}}{=} \textit{“free lunch”}^{3}}$$

[3] Fachbegriff! Ein "No-free-lunch-with-vanishing-risk"-Theorem existiert.

Arbitrage – Begriffsabgrenzung

Bäcker

- hat kein Geld, leiht sich €100.
- kauft Mehl, Butter, Eier, Milch, Zucker, Hefe im Wert von €100.
- backt Hefebrötchen.
- verkauft diese für insgesamt €200.
- zahlt Kredit einschließlich Zins zurück: – €105.
- Gewinn: €95

Ist das eine **Arbitrage?** **Nein.** (Zeitaufwand, Risiko: übrige Brötchen)

Fachbegriff für so etwas? **Ehrliche Arbeit!** (Wertschöpfung)

Wichtig: **Arbitrage darf nichts kosten.** (Auch nicht Zeit oder Risiko.)

Börsennotierte Bundeswertpapiere

- Effektiver Jahreszinssatz (hypothetische Nullkuponanleihe) bei **7 Jahren Laufzeit** am 17.04.2023: **2,41%** (Bundesbankzeitreihe BBSIS.D.I.ZST.ZI.EUR.S1311.B.A604.R07XX.R.A.A._Z._Z.A)
- €10.000 jetzt $\Rightarrow$ €11.813,99 in 7 Jahren.
- Risikoloser Profit: €1.813,99.

$\Rightarrow$ **Arbitrage?**

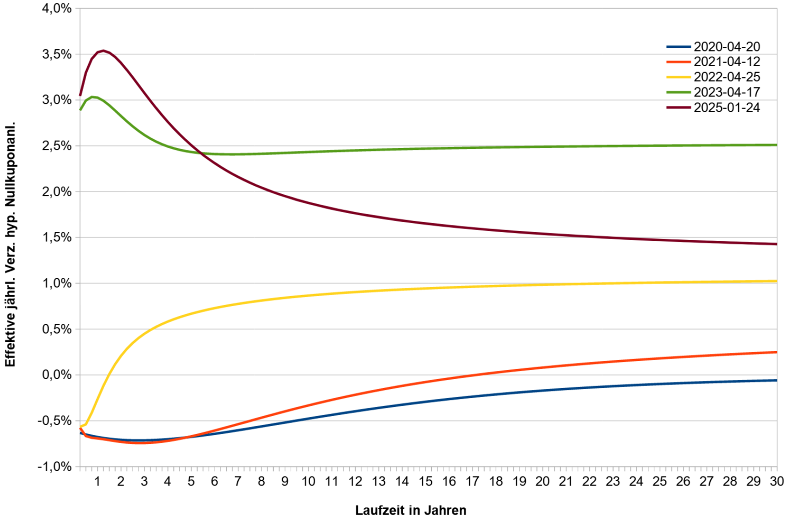
Nein, denn

- Arbitrage muss **ohne Anfangskapital** erreichbar sein.
- Leiht man sich €10.000 um €1.813,99 zu erwirtschaften, muss man **mehr als** 2,41% Zins zahlen. $\Rightarrow$ Verlust!

$\Rightarrow$ **Risikoloser Profit (bei Anfangskapital) ist nur dann Arbitrage, wenn er größer ist als der Sollzins für das geliehene Anfangskapital.**

- Risikoloser Zins kann von jeder/m erwirtschaftet werden.
  = Nichts Besonderes!

Zinsstrukturkurve börsennotierter Bundeswertpapiere über die Jahre



Aus Svensson-Parametern (p.a.eff.). Daten: Deutsche Bundesbank.

Arbitrageure sind nützlich: No-Arbitrage-Prinzip

- Beseitigung von Arbitrage $\Rightarrow$ Marktstruktur bzw. Gleichgewicht.

- Finanzmathematik beruht auf dem **No-Arbitrage-Prinzip**, d.h. auf der universellen Annahme, dass es **kein Geld für umsonst** und **keinen Profit (über den Sollzins hinaus) ohne Risiko** gibt.

- Mathematische Gesetzmäßigkeiten und Methoden:
  - Gesetz der Unterschiedslosigkeit der Preise / *Law of One Price*
  - Zinsparität
  - Put-Call-Parität
  - Zahlungsstrombewertung
  - Swap-Bewertung
  - Derivate-Bewertung
  - Kreditrisiko (*credit spreads*)
  - **Hauptsatz der Bewertungstheorie:**
    (*Fundamental Theorem of Asset Pricing*)
    Arbitragefreiheit $\Leftrightarrow$ alle Preise als faire Spieleinsätze darstellbar

- Manche Aussagen sind modellunabhängig, manche modellabhängig.

- **Call-Preis** ist offensichtlich **modellabhängig**.
- Call-Preis $= 7{,}50 = \frac{15}{2} = 0{,}5 \cdot 0 + 0{,}5 \cdot 15$
- Aktienpreis heute $= 140 = \frac{120+160}{2} = 0{,}5 \cdot 120 + 0{,}5 \cdot 160$

$\Rightarrow$ **Preis**
= Erwartungswert
= durchschnittliche Auszahlung bei einem Modell mit 50-50-Chance
= fairer Spieleinsatz!

Zufall? Nein!

Hauptsatz der Bewertungstheorie:
Arbitragefreiheit $\Leftrightarrow$ risikoneutrales Preismaß existiert.

$\Rightarrow$ Alle Preise sind (diskontierte) Erwartungswerte unter dem risikoneutralen Preismaß.

$\Rightarrow$ Ist der Markt arbitrage-frei, so gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß, unter dem der Markt ein **faires Spiel** ist (und umgekehrt).

$\Rightarrow$ Der Preisoperator ist unter No-Arbitrage ein **lineares Funktional**.

Wie man garantiert reich werden kann.

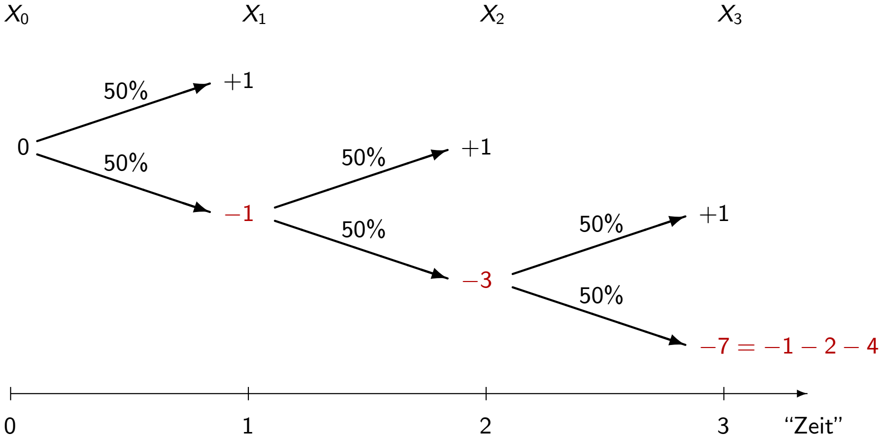
Verdoppelungsstrategie beim **Roulette**.[4]

- 18 rote, 18 schwarze Zahlen.
- Wette auf Rot:
  Gewinn = 2× Einsatz zurück.
  Verlust = Einsatz weg.
- Anfangsguthaben: $X_0 = 0$.
- Arrangiere Kreditgeber.
- Guthaben nach k Runden: $X_k = ?$
- **1. Runde:** Leihe €1, wette auf Rot.
  $$\Rightarrow \begin{cases} \text{Gewinn} \quad X_1 = -1 + 2 = +1 & \Rightarrow \text{ beende Spiel.} \\ \text{Verlust} \quad X_1 = -1 \qquad\;\; = -1 & \Rightarrow \text{ spiele weiter.} \end{cases}$$
- **2. Runde:** Leihe weitere €2, wette auf Rot.
  $$\Rightarrow \begin{cases} \text{Gewinn} \quad X_2 = -1 - 2 + 4 = +1 & \Rightarrow \text{ beende Spiel.} \\ \text{Verlust} \quad X_2 = -1 - 2 \qquad\;\; = -3 & \Rightarrow \text{ spiele weiter.} \end{cases}$$
- **3. Runde:** Leihe weitere €4, wette auf Rot.
  $$\Rightarrow \begin{cases} \text{Gewinn} \quad X_3 = -3 - 4 + 8 = +1 & \Rightarrow \text{ beende Spiel.} \\ \text{Verlust} \quad X_3 = -3 - 4 \qquad\;\; = -7 & \Rightarrow \text{ spiele weiter.} \end{cases}$$

[4] Bildquelle: BHSBöhm.

(Fast) Alle Wege führen nach $+1$.

Ignoriert man die (grüne) Null:



- **n. Runde:** Leihe weitere $\underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{n-1} = 2^{n-1}$ $(2^0 = 1)$ und wette auf Rot.

$$\Rightarrow \begin{cases} X_n^{\text{Gewinn}} = X_{n-1}^{\text{Verlust}} - 2^{n-1} + 2^n = +1 & \Rightarrow \text{ beende Spiel.} \\ X_n^{\text{Verlust}} = X_{n-1}^{\text{Verlust}} - 2^{n-1} = -2^n + 1 & \Rightarrow \text{ spiele weiter.} \end{cases}$$

- **Übungsaufgabe V3:**
  Zeigen Sie, dass die obigen Gleichungen korrekt sind.

- Annahme: **Wahrscheinlichkeit** für 1. Verlust $= c = 50\%$ (generell: $0\% < c < 100\%$). Wegen (stochastischer) Unabhängigkeit

$$\text{Ws. Verluste bis n. Runde} = \underbrace{c \cdot c \cdots c}_{n} = c^n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0, \quad (12)$$

$$\text{Ws. Verluste bis 20. Runde} = 0.5^{20} \approx 0{,}00009537\%, \quad (13)$$

$$\text{Ws. Verluste bis 30. Runde} = 0.5^{30} \approx 0{,}0000009313\%. \quad (14)$$

Probleme mit dem Reichwerden.

- 21. Runde: Weitere €$2^{20} = 1.048.576$ leihen.
  ... und schuldet schon €1.048.575.
- 31. Runde: Weitere €$2^{30} = 1.073.741.824$ leihen.
  ... um €1 zu gewinnen!!
- Unter Umständen muss man eine, 15, oder 2 Millionen Runden spielen.
- Mathematisch: Arbitrage-Strategie muss in einem gewissen Sinne "zulässig" und damit realistisch sein.
- Verdoppelungsstrategie ist nicht realisierbar, **keine Arbitrage**.

Kontakt

Prof. Dr. Tom Fischer
Institut für Mathematik
Universität Würzburg
Emil-Fischer-Str. 30
97074 Würzburg

E-Mail: tom.fischer@uni-wuerzburg.de

https://www.mathematik.uni-wuerzburg.de/financialmathematics

Übungsaufgabe V4:

Eine Bank kann im Interbanken-Markt Geld zu folgenden Bedingungen Geld leihen:

Laufzeit	Zinssatz p.a.
1 Jahr	0,5%
2 Jahre	1,0%
3 Jahre	1,5%

Dabei wird davon ausgegangen, dass Zinsbeträge inklusive Zinseszins erst am Laufzeitende fällig werden. Beispielsweise kann sich die Bank heute €10.000 für zwei Jahre ausleihen und muss dann in zwei Jahren €10.201 zurück zahlen. Ein Kunde will sich von der Bank einen Sofortbetrag von €100.000,00 ausleihen, welchen er in drei gleich großen Ratenzahlungen nach 1, 2 und 3 Jahren abbezahlen will. Unter der Vernachlässigung von Kreditrisiko und unter der Annahme, dass die Bank das Darlehen voll refinanziert, welche Rückzahlungsrate kann sie dem Kunden anbieten, wenn sie einen Sofortgewinn von €1.000,00 machen und in den Zeitpunkten 1, 2 und 3 Jahre vollständig abgesichert sein will?

Übungsaufgabe V1: Lösung

- Annahme: 0% Zinsen; 1 Apple Aktie kostet €140.
- **Portfolio A**: 1.000 Call-Optionen mit Ausübungspreis €145.
- **Portfolio B**: 375 Aktien, €45.000 Schulden.

Fall 1: Aktie $\widehat{=}$ €160 in einem Jahr.

$\Rightarrow$ Portfolio A $\widehat{=}$ 1.000· €15 = €15.000

$\Rightarrow$ Portfolio B $\widehat{=}$ 375· €160 - €45.000 = €15.000

Fall 2: Aktie $\widehat{=}$ €120 in einem Jahr.

$\Rightarrow$ Portfolio A $\widehat{=}$ €0

$\Rightarrow$ Portfolio B $\widehat{=}$ 375· €120 - €45.000 = €0

Fazit: Portfolio A und Portfolio B sind in beiden Szenarien genau gleich viel wert. 1.000 Calls sind so, als ob man 375 Aktien besitzt und €45.000 schuldet.

$\Rightarrow$ **Law of One Price:** 1.000 Calls kosten
375· €140 − €45.000 = €52.500 − €45.000 = €7.500.

$\Rightarrow$ <u>1 Call kostet €7,50</u> **– unter der Annahme von No-Arbitrage!**

Übungsaufgabe V1: Lösung (Forts.)

Wie genau funktioniert nun die auf S. 20 erwähnte Absicherungs- oder Hedgingstrategie?

- Annahme: Eine Bank hat 1.000 der Call-Optionen aufgelegt und verkauft.

$\Rightarrow$ Einnahmen: €7.500.

- Die Bank nimmt nun noch €45.000 Schulden zu 0% Zinsen auf.

$\Rightarrow$ Insgesamt vorhandenes Kapital: €52.500 (7.500 + 45.000).

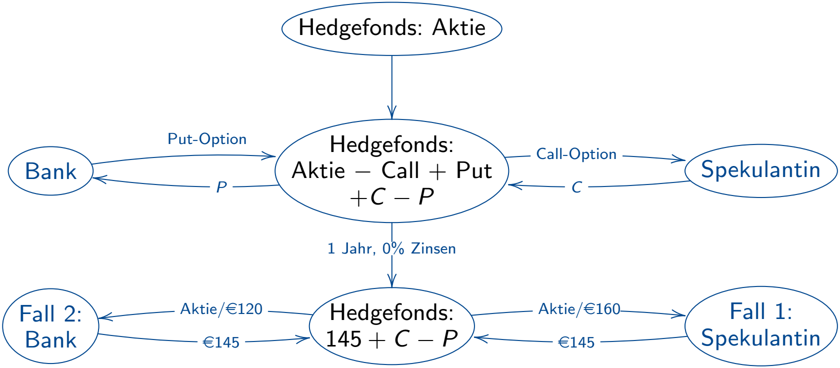
- Die Bank kauft nun mit diesem Kapital 375 Aktien ($375 \cdot 140 = 52.500$). Sie hält nun folglich das Portfolio B von oben.

$\Rightarrow$ Ein Jahr später entspricht der Wert von Portfolio B in beiden Fällen genau dem Betrag, welchen die Bank den Käufern der Call-Optionen bei *"cash settlement"* bezahlen muss.

Fazit: Die Bank ist vollständig abgesichert und macht weder Gewinn noch Verlust. Will sie Profit machen, so kann sie beispielsweise eine zusätzliche Gebühr verlangen.

Übungsaufgabe V2: Lösung

- **Szenario 1:** Hedgefonds besitzt Apple Aktie.
- Verkauft Call-Option für Preis C (erschafft die Option, erzeugt Einnahme).
- Kauft Put-Option für Preis P (Ausgabe).
- 0% Zinsen.



$\Rightarrow$ Hedgefonds wandelt Aktie in garantierten Betrag $145 + C - P$ um.

- Lohnt sich, wenn Aktienpreis $< 145 + C - P$.

Übungsaufgabe V2: Lösung (Forts.)

Falls

$$\text{Call-Preis} - \text{Put-Preis} > \text{Aktienpreis} - \text{Ausübungspreis} \tag{15}$$

$\Rightarrow$ alle Hedgefonds kaufen Aktien, verkaufen Calls, kaufen Puts.

$\Rightarrow$

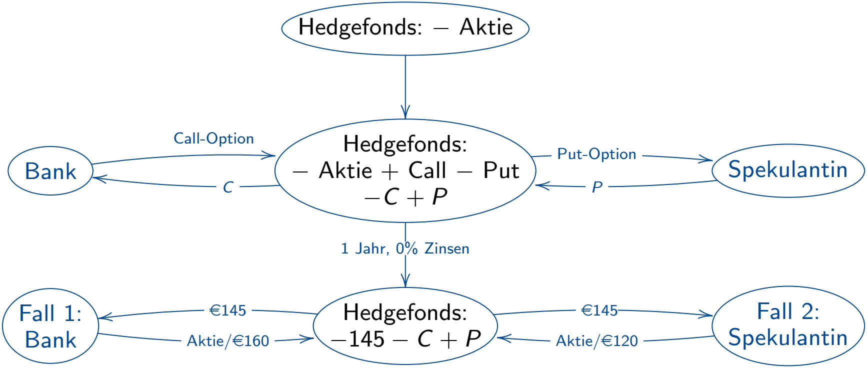
$$\underbrace{\text{Call-Preis} \searrow - \text{Put-Preis} \nearrow}_{\searrow} > \text{Aktienpreis} \nearrow - \text{Ausübungspreis} \tag{16}$$

Bis schließlich

$$\text{Call-Preis - Put-Preis} = \text{Aktienpreis} - \text{Ausübungspreis.} \tag{17}$$

- **Bemerkung:** Wenn der Hedgefonds anfänglich kein Geld hat, dann ziehen Sie in der Mitte der obigen Grafik immer den Kaufpreis von €140 ab. Das Ergebnis (17) bleibt hiervon unberührt.

- **Szenario 2:** Hedgefonds schuldet Apple Aktie mit Fälligkeit in einem Jahr.
- Kauft Call-Option für Preis C (Ausgabe).
- Verkauft Put-Option für Preis P (erschafft die Option, erzeugt Einnahme).
- 0% Zinsen.



$\Rightarrow$ Hedgefonds wandelt Aktienschuld in garantierten Betrag $-145 - C + P$ um.

- Lohnt sich, wenn Aktienpreis $> 145 + C - P$.

Übungsaufgabe V2: Lösung (Forts. 3)

Falls

$$\text{Call-Preis} - \text{Put-Preis} < \text{Aktienpreis} - \text{Ausübungspreis} \tag{18}$$

⇒ alle Hedgefonds verkaufen Aktien (ohne diese zu besitzen/"*short selling*"), kaufen Calls, verkaufen Puts.

⇒

$$\underbrace{\text{Call-Preis} \nearrow - \text{Put-Preis} \searrow}_{\nearrow} < \text{Aktienpreis} \searrow - \text{Ausübungspreis} \tag{19}$$

Bis schließlich

$$\text{Call-Preis - Put-Preis} = \text{Aktienpreis} - \text{Ausübungspreis}. \tag{20}$$

- **Bemerkung:** Wenn der Hedgefonds anfänglich keine Aktienschulden hat, dann addieren Sie in der Mitte der obigen Grafik immer den Verkaufspreis der Aktie von €140. Das Ergebnis (20) bleibt hiervon unberührt.

Die Gleichungen stimmen, weil mit

$$\begin{aligned} & X_n^{\text{Verlust}} &=& -1-2-2^2-\ldots-2^{n-1} & (21)\\ \text{und} & 2X_n^{\text{Verlust}} &=& -2-2^2-\ldots-2^{n-1}-2^n & (22)\\ \text{auch} & X_n^{\text{Verlust}} &=& 2X_n^{\text{Verlust}}-X_n^{\text{Verlust}} = -2^n+1. & (23)\end{aligned}$$

folgt.

Übungsaufgabe V4: Lösung

Die Ratenhöhe sei R. Die Bank ist in 1, 2 und 3 vollständig abgesichert, wenn die Einnahmen dann jeweils den Ausgaben entsprechen, wobei die Einnahmen offensichtlich jeweils R sind. Es muss daher

$$1.000 = R \cdot \left(\frac{1}{1{,}005} + \frac{1}{1{,}01^2} + \frac{1}{1{,}015^3} \right) - 100.000 \qquad (24)$$

gelten, weil die Bank beispielsweise R in zwei Jahre zurück zahlen muss, wenn sie sich heute $\frac{R}{1{,}01^2}$ von einer anderen Bank leiht. Also

$$\begin{aligned} R &= \frac{101.000}{\frac{1}{1{,}005} + \frac{1}{1{,}01^2} + \frac{1}{1{,}015^3}} \qquad (25) \\ &\approx 34.451{,}73. \end{aligned}$$