Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Mathematik der Computertomographie

Emanuel Pfarr und Kristina Bätz

3. September 2024

Was ist Computertomographie?

- bildgebendes Verfahren zur Darstellung von inneren Körperstrukturen
- Anwendung unter anderem in Medizin, um Organe darzustellen

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Was ist Computertomographie?

- Patient wird auf beweglichem Tisch in Ringtunnel geschoben, um die sich Röhre dreht
- Röntgenstrahlen werden in der Querschnittsebene aus vielen verschiedenen Richtungen durch Körper geschickt
- Detektor gegenüber misst die Intensitäten der Röntgenstrahlen
- innere Materialzusammensetzung des Körpers wird aus gemessener Datenmenge berechnet

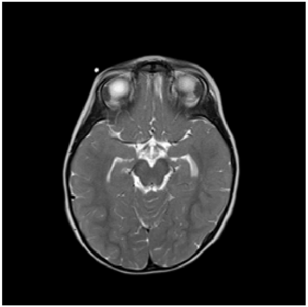
Vergleich zum Röntgen

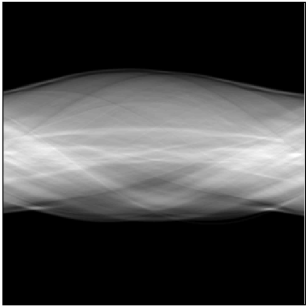
- Im Gegensatz zur Röntgenuntersuchung ermöglicht CT Blick ins Innere des Körpers.
- Damit lassen sich z.B. örtliche Lage, Form und Größen von Organen bestimmen.

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Rekonstruktion

direktes Problem

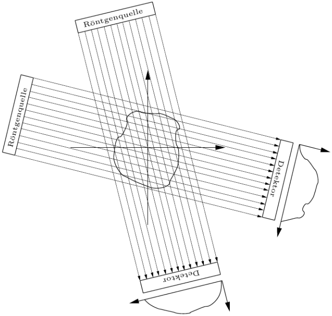




inverses Problem

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Bestrahlungsarten



- Es gibt unterschiedliche Bestrahlungsarten z.B. parallele Strahlen oder Kegel.
- Im Folgenden Betrachtung der Bestrahlungsart parallele Strahlen, da sie sich leichter modellieren lassen.

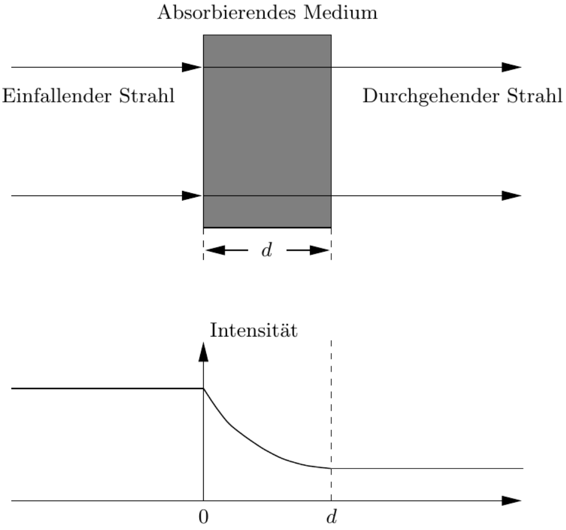
Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Techn./Physikal. Grundlagen

- Röntgenstrahlen werden von verschiedenem Gewebe unterschiedlich stark abgeschwächt.
- Wie stark, das gibt Absorptionskoeffizient an.

Energie (keV)	Knochen	Gehirn–zellen	Brustkrebs–metastasen	Meningiom	chronisches Hämatom	Gehirn–flüssigkeit
41	0.999	0.265	0.288	0.269	0.266	0.260
52	0.595	0.226	0.241	0.227	0.228	0.222
60	0.416	0.210	0.220	0.213	0.212	0.207
84	0.265	0.183	0.190	0.187	0.184	0.181
100	0.208	0.174	0.179	0.176	0.175	0.171

Techn./Physikal. Grundlagen



Lambert-Beer-Gesetz

Gesetz zur Abnahme der Intensität:

$$I\,(d) = I\,(0)\exp\left(-\mu d\right)$$

$I(d)$: Intensität des des austretenden Stahls
$I(0)$: Intensität des einfallenden Strahls
d: Dicke des durchlaufenen homogenen Medium
μ: linearer Schwächungskoeffizient

Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Mathematische Grundlagen

Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{31}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Schreibweise

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Mathematische Grundlagen

Beispiel Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 75 \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 50 \\ 1x_1 + 1x_2 + 4x_3 &= 50 \end{aligned}$$

Matrix-Vektor-Schreibweise

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 75 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Mathematische Grundlagen

Matrix-Vektor-Produkt

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 \\ 1x_1 + 1x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

Mathematische Grundlagen

Matrixmultiplikation

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$$

Mathematische Grundlagen

Gauß-Algorithmus
Erlaubte Umformungen:

- Addieren und Subtrahieren von Zeilen
- Multiplizieren und Dividieren von Zeilen mit einer Zahl
- Vertauschen von Zeilen

Mathematische Grundlagen

Gauß-Algorithmus

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 3 & 75 \\ 1 & 2 & 2 & 50 \\ 1 & 1 & 4 & 50 \end{array}\right. \xrightarrow{Z_2 \to Z_2 - Z_3} \left.\begin{array}{ccr|c} 2 & 2 & 3 & 75 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 50 \end{array}\right. \xrightarrow{Z_3 \to 2Z_3}$$

$$\left.\begin{array}{ccr|c} 2 & 2 & 3 & 75 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 8 & 100 \end{array}\right. \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_1} \left.\begin{array}{ccr|c} 2 & 2 & 3 & 75 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array}\right.$$

Mathematische Grundlagen

Zeilenstufenform

$$
\left(\begin{array}{ccr|l}
2 & 2 & 3 & 75 \\
0 & 1 & -2 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 25
\end{array}\right)
$$

Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 75 \\
1x_2 - 2x_3 &= 0 \\
5x_3 &= 25
\end{aligned}
$$

Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Mathematische Grundlagen

Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 75 \\ 1x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 5x_3 &= 25 \end{aligned}$$

Lösen der letzten Gleichung

$$x_3 = 5$$

Einsetzen von $x_3 = 5$ in zweite Gleichung

$$x_2 - 2 \cdot 5 = 0$$

Lösen der zweiten Gleichung

$$x_2 = 10$$

Mathematische Grundlagen

Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 75 \\ 1x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 5x_3 &= 25 \end{aligned}$$

Einsetzen von $x_2 = 10$ und $x_3 = 5$ in erste Gleichung

$$2x_1 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 5 = 75$$

Lösen der ersten Gleichung

$$x_1 = 20$$

Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Mathematische Grundlagen

Ausgleichsproblem

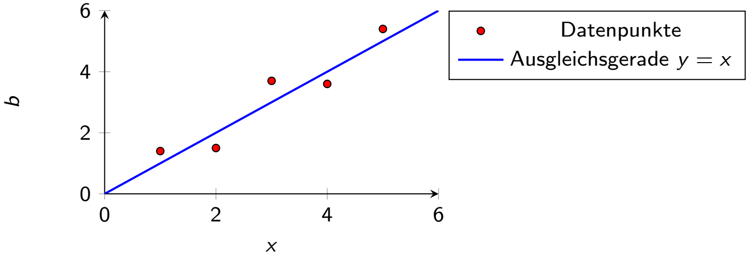
$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} ||Ax - b||^2,$$

wobei

$$||x|| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$$

Mathematische Grundlagen

- Gegeben: Datenpunkte (x_k, b_k)
- Gesucht: Ausgleichsgerade mit $y(x_k) = mx_k + t = b_k$



Mathematische Grundlagen

- Gesucht: Ausgleichsgerade mit $y(x_k) = mx_k + t = b_k$
- Lineares Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} m \\ t \end{pmatrix}}_{=\vec{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{=\vec{b}}$$

ist äquivalent zu $A\vec{x} = \vec{b}$.

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Mathematische Grundlagen

- Gleichungssystem kann überbestimmt sein, d.h. es könnte keine Lösung geben
- Was können wir tun?
- Bestimmung des Minimums

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} ||Ax - b||^2$$

über Normalengleichung

$$A^T Ax = A^T b$$

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Mathematische Grundlagen

Transponierte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$$

Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Mathematische Grundlagen

Herleitung der Normalengleichung über Gerade

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} m \\ t \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} ||Ax - b||^2 &= (mx_1 + t - b_1)^2 + \cdots + (mx_1 + t - b_n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (mx_i + t - b_i)^2 \end{aligned}$$

Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Mathematische Grundlagen

$$||Ax - b||^2 = \sum_{i=1}^{n} (mx_i + t - b_i)^2$$

Ableitungen nach m bzw. t

$$\left.\begin{array}{l} \sum_{i=1}^n 2x_i\,(mx_i + t - b_i) \overset{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow\ m\sum_{i=1}^n x_i^2 + tx_i = \sum_{i=1}^n x_i b_i \\ \sum_{i=1}^n 2\,(mx_i + t - b_i) \overset{!}{=} 0 \\ \Leftrightarrow\ m\sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n t = \sum_{i=1}^n b_i \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \overbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{pmatrix}}^{=A^T A} \overbrace{\begin{pmatrix} m \\ t \end{pmatrix}}^{=x} \\ = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n x_i b_i \\ \sum_{i=1}^n b_i \end{pmatrix}}_{=A^T b} \end{array}$$

Bildrekonstruktion

- Unterteile das Objekt in ein Gitter.
- Mache mehrere Messungen.
- Erstelle aus der Geometrie des Objektes ein Gleichungssystem.
- Das Lösen dieses Gleichungssystems ergibt ein Gitter, in welchem jede Zelle als Eintrag ihren Absorptionsfaktor hat.

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Schritt 1: Gitter

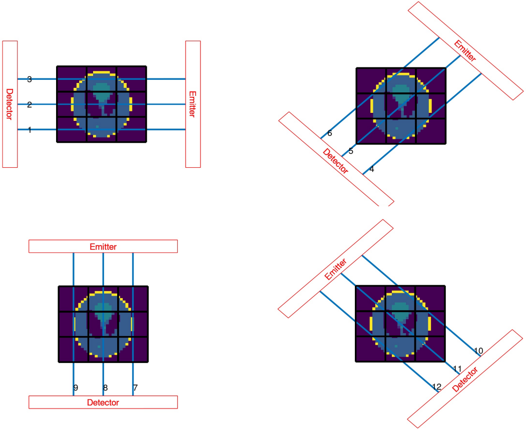
Nummerierung der Zellen:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Testobjekt:

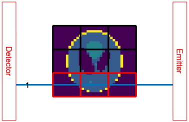
Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Schritt 2: Strahlen

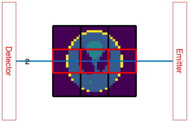


Addieren wir also die Absorption der Zellen 1, 2 und 3, so erhalten wir die absorbierte Intensität des Strahles mit der Nummer 3. Erstellen wir auf diese Weise für jeden Strahl eine Gleichung, erhalten wir ein lineares Gleichungssystem.

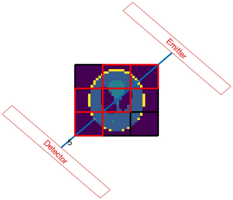
Kleineres Beispiel: Matrix erstellen



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ & & & \vdots & & & & & \\ & & & & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \\ 5 \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix} & & & \vdots & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & \vdots & & & & & \end{pmatrix} \end{array}$$

Größeres Beispiel

- Die Modellierung oben erlaubt offensichtlich nur eine 3×3-Rekonstruktion.
- Ein 3×3-Bild reicht nicht aus, um das Objekt darzustellen.

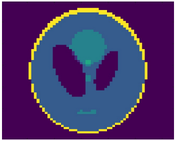
$$\Rightarrow$$

Verkleinere das Gitter und erhöhe Anzahl an Messungen!

Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Größeres Beispiel

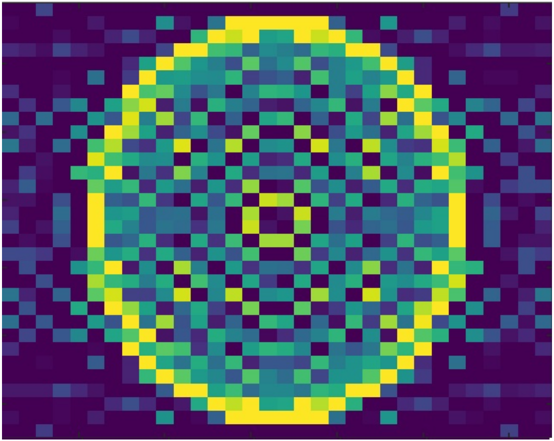
- Testobjekt:



- Unterteile das Objekt in 32×32 Quadrate.
- Bewege den Emitter mit 42 Strahlen und 129 Winkeln um das Objekt.
- Wir erhalten $42 \times 129 = 5418$ Messungen M.
- Wir wollen ein LGS erstellen, sodass $Ax = M$, wobei der j-te Eintrag M_j von M die Differenz zwischen der Intensität I_{Emitter_j} des j-ten Strahles beim Aussenden und der gemessenen Intensität I_{Detector_j} nach dem Austreten des j-ten Strahles ist. Die Lösung dieses LGS ist unsere Rekonstruktion.

Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

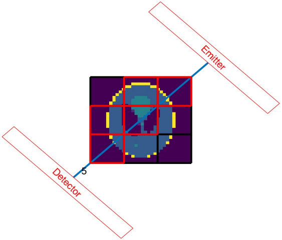
Rekonstruktion



Frage: Können wir die Rekonstruktion verbessern?
Antwort: Ja! Beachte die Strecke, die jeder Strahl innerhalb eines Quadrates zurücklegt.

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

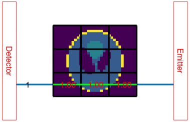
Schnittlänge



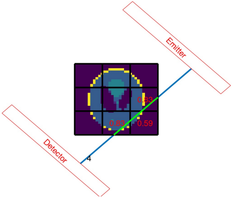
Betrachten wir den 5. Strahl im diesem Beispiel, so können wir sehen, dass er wesentlich mehr Weg in der Zelle 3, 5 und 7 als in der Zelle 2 und 4 zurücklegt. Die Zellen, in denen der Strahl mehr Weg zurücklegt, bringen ihren Absorptionsfaktor stärker ein. Wir müssen also die Länge des Schnittes der Strahlen mit den Zellen berechnen.

Übungsblatt Aufgabe 5

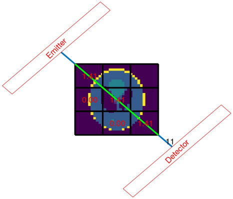
Kleineres Beispiel: Matrix erstellen



$$
\begin{array}{c}
\\
1 \\
\\
\\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.00 & 1.00 & 1.00 \\
 & & & \vdots & & & & & \\
 & & & & & & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



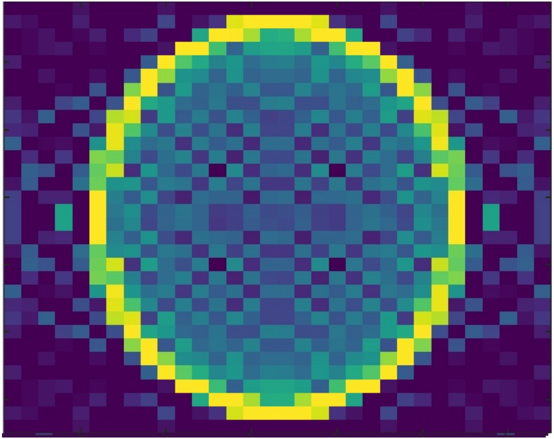
$$
\begin{array}{c}
\\
\\
4 \\
\\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
 & & & \vdots & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.83 & 0 & 0.83 & 0.59 \\
 & & & \vdots & & & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



$$
\begin{array}{c}
\\
\\
11 \\
\\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
 & & & \vdots & & & & & \\
1.41 & 0 & 0 & 0 & 1.41 & 0 & 0 & 0 & 1.41 \\
 & & & \vdots & & & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Rekonstruktion



Frage: Können wir die Rekonstruktion verbessern?
Antwort: Ja! Beachte die exponentielle Abnahme der Intensität.

Exponentielle Abnahme

Beachte, dass die für den j-ten M_j Eintrag von M_j

$$M_j = [A]_j O$$

gilt, wobei $[A]_j$ die $j - te$ Zeile der Matrix A ist und O das Objekt als Spaltenvektor. Oben haben wir

$$I_{\text{Emitter}_j} - [A]_j O = I_{\text{Detector}_j}$$

angenommen. Wir benutzen das Gesetz zur exponentiellen Abnahme, welches wir in den physikalischen Grundlagen besprochen haben:

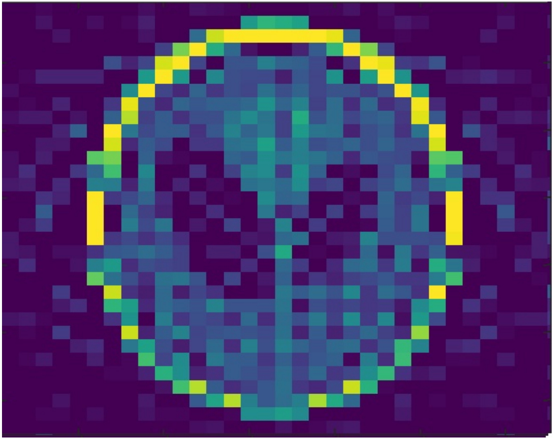
$$I_{\text{Emitter}_j} \exp([A]_j O) = I_{\text{Detector}_j}.$$

Umstellen ergibt

$$M_j = [A]_j O = -\log \frac{I_{\text{Detector}_j}}{I_{\text{Emitter}_j}}.$$

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Rekonstruktion



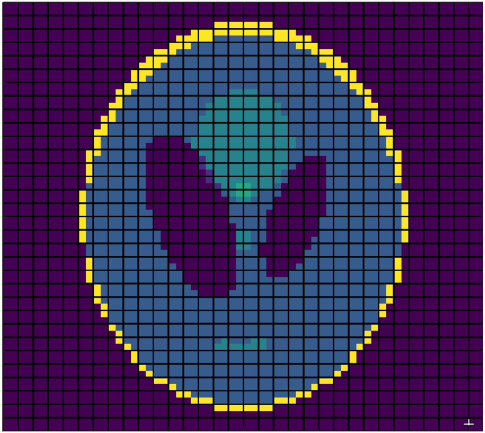
Frage: Können wir die Rekonstruktion verbessern?

Antwort: Ja! Verkleinere das Gitter auf 64×64.

Julius-Maximilians-
UNIVERSITÄT
WÜRZBURG

Rekonstruktion

32×32 Gitter :



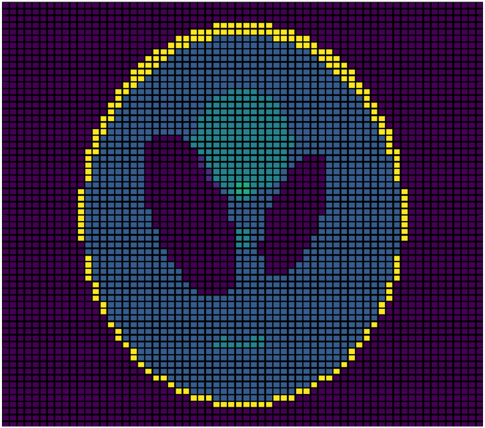
Beobachtung: Es gibt Quadrate, die mehrere Farben (Pixel), also mehrere Werte enthalten.

$\Rightarrow$ Wir können das wahre Objekt nicht rekonstruieren.

Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Rekonstruktion

64×64 Gitter:



Beobachtung: Jedes Quadrat hat nur eine Farbe (Pixel), also enthält es nur ein Wert.

Rekonstruktion

Frage: Können wir die Rekonstruktion verbessern?
Antwort: Nein. Wir haben das reale Objekt rekonstruiert.

Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Rekonstruktion

Schlussfolgerung:

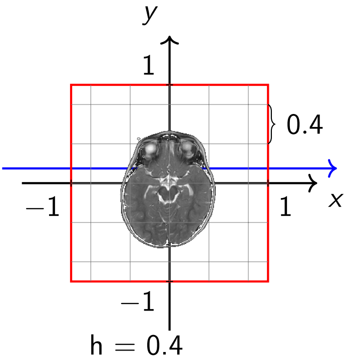
Das Verfeinern des mathematischen Modells und das Einbeziehen physikalischer Gesetze verbessert das Ergebnis unserer Rekonstruktion.

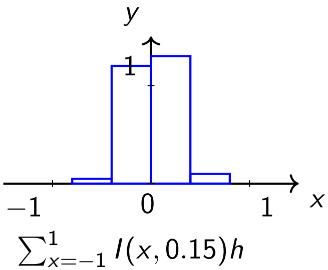
Radon-Transformation

In der Realität bestehen Objekte nicht aus Pixeln, sondern haben kontinuierliche Übergänge. Wir bräuchten also ein Gitter mit unendlich kleinem Abstand, damit wir die Realität rekonstruieren können. Die Betrachtung dieses Problem geschieht durch die Radon-Transformation.

Radon-Transformation

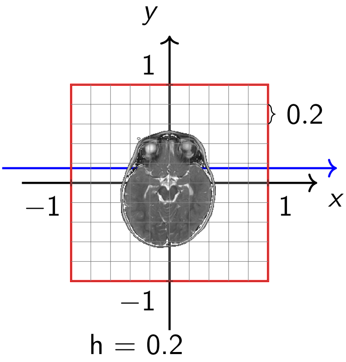
- $I(x, y)$ gibt die absorbierte Intensität des Quadrates, welches den Punkt (x, y) enthält, an.
- h gibt die Dimension des Gitters an.
- Der betrachte Strahl ist auf der Höhe $y = 0.15$.

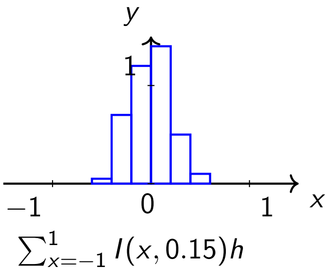




Radon-Transformation

- $I(x, y)$ gibt die absorbierte Intensität des Quadrates an, welches den Punkt (x, y) enthält.
- h gibt die Dimension des Gitters an.
- Der betrachtete Strahl hat ist auf der Höhe $y = 0.15$.

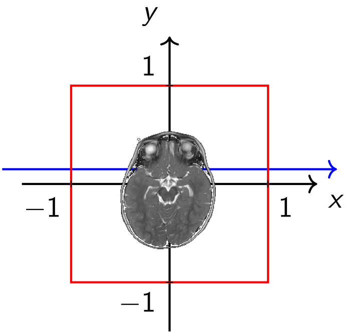


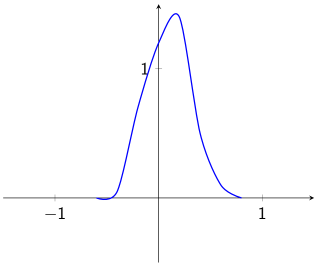


Julius-Maximilians-UNIVERSITÄT WÜRZBURG

Radon-Transformation

Machen wir das Gitter immer feiner und feiner, so erhalten wir die Fläche unter dem kontinuierlichen Graphen der Intensitätsabsorbtionsfunktion auf der Höhe $y = 0.15$.





$$\int_{-1}^{1} I(x, 0.15)\mathrm{d}x$$

Radon-Transformation

Das Modell für die Realität ist also so, dass wir für jeden Strahl S_j ein Integral erhalten. Wir haben somit kein LGS, sondern ein System von Integralgleichungen

$$\int_{-1}^{1} I(x, S_j(x))\mathrm{d}x = M_j, \quad j = 1, \dots, m,$$

wobei

$$M_j = -\log \frac{I_{\mathrm{Detector}_j}}{I_{\mathrm{Emitter}_j}}$$

die Messungen sind, welche dem exponentiellen Abnahmegesetz folgen. Dieses System nennt man die Radon-Transformation der Intensitätsabsorptionsfunktion $I(x, y)$. Haben wir unendlich viele Strahlen, so können wir die Funktion genau rekonstruieren.