Sommersemester 2024 03.09.2024
Emanuel Pfarr, Kristina Bätz

Übung zur Mathematik der Computertomographie

Aufgabe 1. Schreibe die folgende Gleichungssysteme in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$.

a) $4x - 2y = 10,$
$3x + 5y = -8$

b) $3x + y - 4z = 5,$
$-2x + 4z = -3,$
$x - 2y - z = 0$

Aufgabe 2. Berechne das Ergebnis.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -7 & 3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 6 \\ 4 & -2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung zu 2.

a) $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 14 & -10 & 27 & -27 \\ -9 & -6 & 22 & -51 \\ 3 & 12 & -39 & 72 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 3. Löse die linearen Gleichungssysteme, indem du sie in die Form $A\vec{x} = \vec{b}$ bringst und anschließend mit dem Gauß-Algorithmus löst.

a) $x + y + 3z = -1,$
$-x + 2z = -2,$
$5x + 2y - z = 7$

b) $2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -5,$
$-6x_2 + 2x_3 + 4x_4 = -10,$
$6x_2 - x_3 - 9x_4 = 23,$
$8x_1 + 2x_2 + 12x_3 + 2x_4 = -8$

a) $x = -4, y = 12, z = -3$

b) $x_1 = 3, x_2 = -1, x_3 = -2, x_4 = -3$

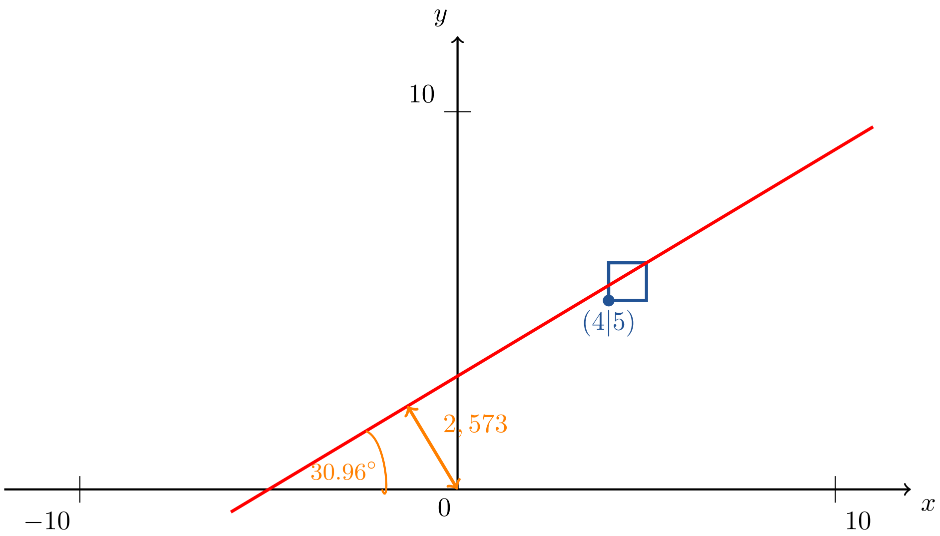
Aufgabe 4. Gegeben seien $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. Stelle die Normalengleichung auf und löse sie.

Lösung zu 4. $A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$,

$A^T b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Lösung $x = 0.5$, $y = 0.5$

Aufgabe 5. Berechne, wie lange der Schnitt des roten Strahles mit dem blauen Quadrat (der blauen Zelle) ist, welches Seitenlänge 1 hat. (Alle Zwischenergebnisse sind auf 2 Nachkommastellen zu runden.)



Sei nun weiterhin ein Quadrat (eine Zelle) gegeben, welches als linke untere Ecke den Punkt $(x|y)$ hat. Für welche x, y schneidet der gegebene Strahl das Quadrat (die Zelle)?

Lösung zu 5.
Schnittlänge: Stelle die Geradengleichung $y = mx+t$ der roten Gerade auf: Es gilt offensichtlich $m = \tan(30.96°) \approx 6/10$. Der Abstand zum 0 Punkt beträgt $2,573$, d.h. der Schnittpunkt **SP** zwischen der Gesuchten Gerade und der zu ihr senkrecht stehenden Gerade $y = -10/6x$ ist $2,573$ vom Nullpunkt entfernt. Der Schnittpunkt hat die Koordinaten:

$$\begin{aligned} & \frac{6}{10}x + t = -\frac{10}{6}x \\ \Leftrightarrow \quad & t = -\frac{34}{15}x \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{15}{34}t = x \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbf{SP}\left(-\frac{15}{34}t \mid \frac{25}{34}t\right) \end{aligned}$$

Jetzt gilt $\|\mathbf{SP}\| = 2,573$, also

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(-\frac{15}{34}t\right)^2 + \left(\frac{25}{34}t\right)^2} = 2,573 \\ \Leftrightarrow \quad & t \approx 3 \\ \Leftrightarrow \quad & y = \frac{6}{10}x + 3 \end{aligned}$$

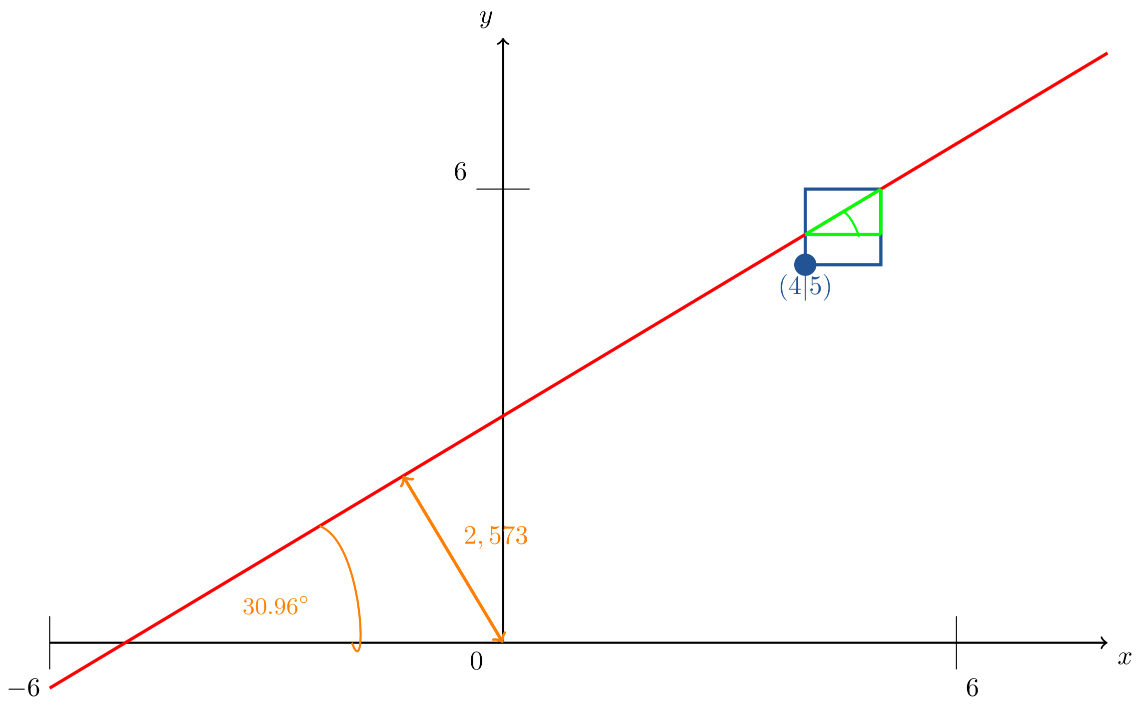
Nun müssen wir nur noch die Schnittpunkte dieser Gerade mit den Seiten des Quadrates berechnen, damit wir auf die Länge des Strahles innerhalb des Quadrates kommen. Die Schnittpunkte $\mathbf{SP}_{\mathrm{l}}$, $\mathbf{SP}_{\mathrm{r}}$ liegen auf der linken bzw. rechten Kante des Quadrates:

$$y = \frac{6}{10}4 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = 5,4 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{SP}_{\mathrm{l}}(4|5,4)$$
$$y = \frac{6}{10}5 + 3 \quad \Leftrightarrow \quad y = 6 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{SP}_{\mathrm{r}}(5|6).$$

Die Länge des Strahles innerhalb des Quadrates ist also

$$\sqrt{(5-4)^2 + (6-5,4)^2} \approx 1.17.$$

Pur Geometrischer Ansatz:



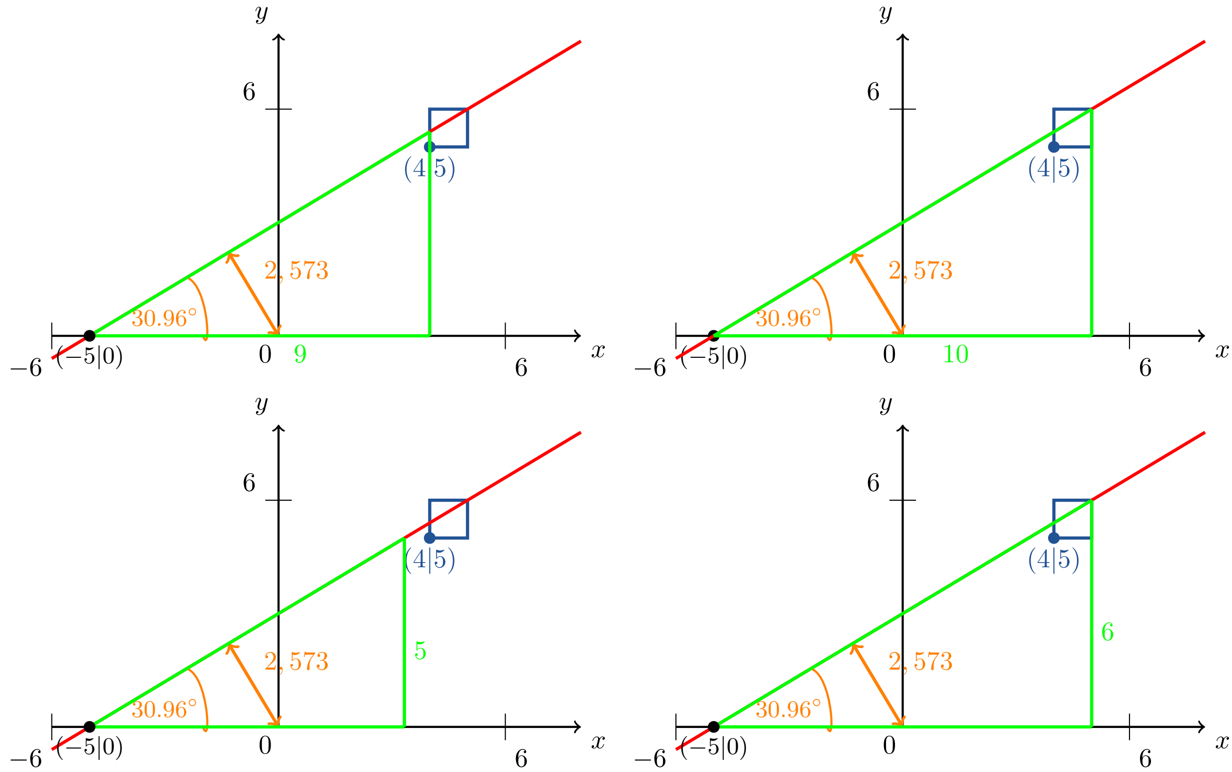
Betrachten wir das grüne Dreieck, so sehen wir, dass der eingezeichnete Winkel im grünen Dreieck auch 30.96° ist und die Ankathete die Länge 1 hat. Die Schnittlänge ist die Länge der Hypotenuse des eingezeichneten Dreiecks, also ist sie $1/\cos(30.96°) \approx 1.17$

Beliebiger Punkt: Der erste Ansatz von oben lässt uns nun leicht eine Entscheidungsregel aufstellen, ob der Strahl die Zelle schneidet. Im allgemeinen Schneidet der Strahl die Zelle, wenn der Strahl einen Schnittpunkt auf einer der Seiten der Zelle hat. Das lässt sich übersetzten in:

$$y \leq \frac{6}{10}x + 3 \leq y + 1 \quad \text{oder} \quad y \leq \frac{6}{10}(x+1) + 3 \leq y + 1$$
$$x \leq \frac{10}{6}(y-3) \leq x + 1 \quad \text{oder} \quad x \leq \frac{10}{6}((y+1)-3) \leq x + 1$$

wobei die erste Bedingung ein Schnittpunkt mit der linken Seite, die zweite Bedingung ein Schnittpunkt mit der rechten Seite, die dritte Bedingung ein Schnittpunkt mit der unteren Seite und die vierte Bedingung ein Schnittpunkt mit der oberen Seite bedeutet.

Geometrisch: Schritt 1: berechne den SP des Strahles mit der x-Achse. Betrachten wir da Dreieck, welches durch den Strahl, den Abstandspfeil und der x-Achse gegeben ist, so können wir einfach sehen, dass sich der SP $(x_0|0)$ mit der x-Achse mit $2,573/\sin(30.96°) = 5$ berechnen lässt. Schritt 2: Wir bilden nun vier Dreiecke, welche uns jeweils entscheiden lassen, ob wir einen SP mit einer der Seiten haben.



Wir können sehen, ist die Gegenkathete des ersten Dreiecks zwischen 5 und 6, dann schneidet der Strahl die blaue Zelle. Ist die Ankathete des 3. Dreiecks zwischen 9 und 10, so schneidet der Strahl das blaue Dreieck in der unteren Seite. Führen wir dieses Argument fort, so ergeben sich folgende vier Bedingungen:

$$y \leq \tan(30.96°) \cdot (x - x_0) \leq y + 1 \quad \text{oder} \quad y \leq \tan(30.96°) \cdot ((x+1) - x_0) \leq y + 1$$

$$x - x_0 \leq \frac{y}{\tan(30.96°)} \leq x - x_0 + 1 \quad \text{oder} \quad x - x_0 \leq \frac{y+1}{\tan(30.96°)} \leq x - x_0 + 1$$

Aufgabe 6. Wir wollen ein Objekt tomographisch rekonstruieren. Dafür unterteilen wir das Objekt in ein 3×3 Gitter, so dass jede Zelle ein Quadrat mit Seitenlänge 1 ist. Es gibt folgende Strahlen:

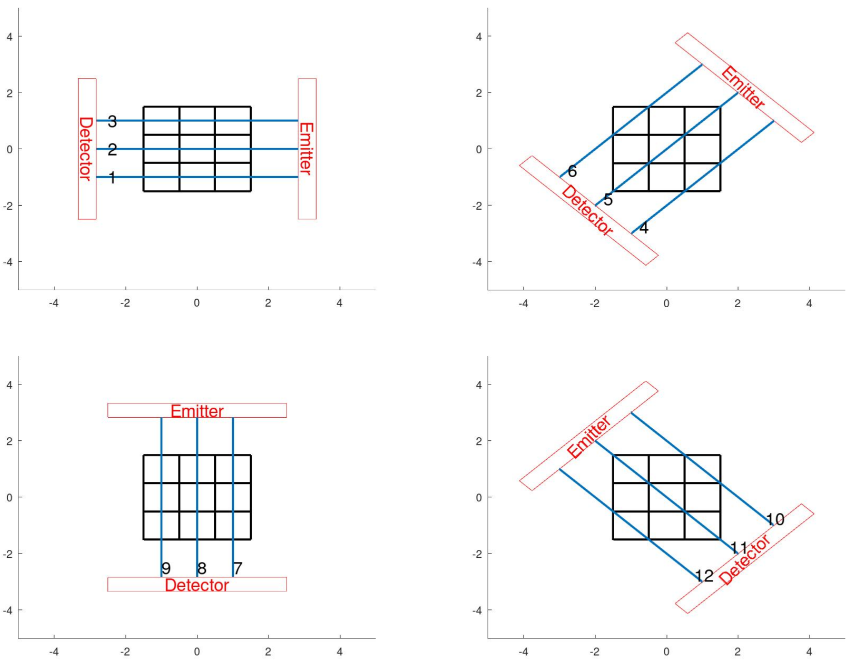


Abbildung 1: Ein Objekt wird in vier Winkeln von jeweils drei Strahlen durchleuchtet.

a) Erstelle die 'naive' Rekonstruktionsmatrix N_3, welche genau dann eine 1 in der j-ten Zeile und der i-ten Spalte als Eintrag hat, wenn der j-te Strahl die i-te Zelle schneidet. Sonst sind alle Einträge der Matrix 0.

b) Erstelle die Rekonstruktionsmatrix R_3, welche in der j-ten Zeile und der i-ten Spalte als Eintrag die Länge des Schnittes des j-ten Strahles mit der i-ten Zelle hat.

c) Wir messen mit dem Detektor folgende Itensitäten

$$I_{\text{Detector}} = (5, 3, 7, 1, 8, 6, 6, 1, 0, 2, 9, 6)^T.$$

Unsere Strahlen starten mit der Intensität $I_{\text{Emitter}} = 10$. Schreibe das LGS des 'naiven' Rekonstruktionsproblems auf, in dem die Rekonstruktionsmatrix N_3 und die Messungen ohne das exponentielle Abnahmegesetz miteinbezogen werden. Erstelle zusätzlich das LGS des verfeinerten Rekonstruktionsproblems, in dem die Rekonstruktionsmatrix R_3 benutzt werden soll. Dabei sollen die Messungen unter Betrachtung des exponentiellen Abnahmegesetzes miteinbezogen werden.

d) Wir wollen unsere Rekonstruktion verbessern, indem wir unser Gitter verfeinern. Wir wählen ein 6×6 Gitter und unterteilen jedes Quadrat unseres alten Gitters in 4 Quadrate. Zeichne eine Skizze mit dem neuen Gitter für den zweiten Winkel, bei dem also die Strahlen 4, 5 und 6 zu sehen sind. Welche Seitenlänge haben die neue Quadrate? Wie sehen die Rekonstruktionsmatritzen N_6 und R_6 aus? Gibt es einen Zusammenhang zwischen N_3 und N_6, bzw. R_3 und R_6?

e) Löse das LGS (bzw. die linearen Ausgleichsprobleme), welche in Aufgabe 5c) aufgestellt wurden.

Lösung zu 6.

a)

$$N_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b)

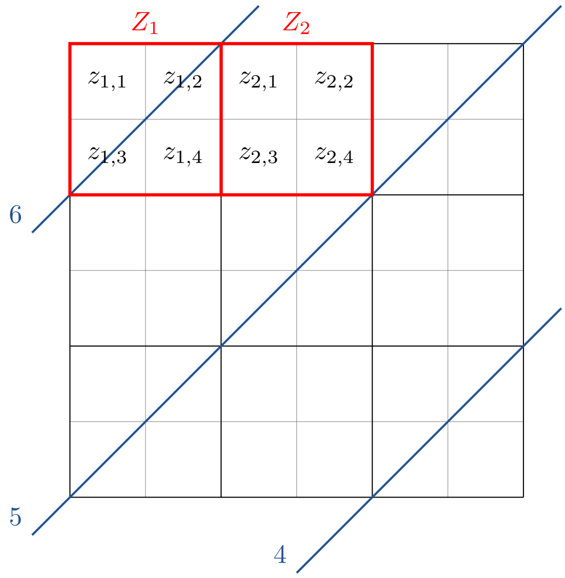
$$R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$N_3 x = 10 - I$$

$$R_3 x = -\log\left(\frac{10}{I}\right)$$

d)



Die neuen Seitenlängen sind 0.5 cm.
Für den Zusammenhang der Matritzen, definieren wir zunächst $M_{Z_i} = \{z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}, z_{i,4}\}$ als die Menge der Zellen z im feineren Gitter, welche in der groben Zelle Z_i enthalten sind. Im obigen Bild sind zwei Beispiele eingezeichnet. Hier sehen wir, die Zelle Z_1, welche im Groben Gitter den Wert 1 hat, enthält die Zellen $z_{1,1}, z_{1,2}, z_{1,3}, z_{1,4}$, welche im feinen Gitter die Werte $1, 2, 7, 8$ haben. Mit $[R_3]_{j,Z_i}$ meinen wir den Eintrag in der Matrix R_3 in der j-ten Zeile und der Z_i-ten Spalte, also den Schnitt des j-ten Strahles mit der Zelle Z_i im groben Gitter. Mit $[R_6]_{j,z_{i,1}}$ meinen wir den Eintrag in der Matrix R_6 in der j-ten Zeile und der $z_{i,1}$-ten Spalte, also den Schnitt des j-ten Strahles mit der Zelle $z_{i,1}$ im feinen Gitter. Dann ist der Zusammenhang folgender:
Zwischen R_3 und R_6:
Die Summe der Längen des j-ten Strahles in den Zellen $z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}, z_{i,4}$ ist die Länge des Strahles in Z_i, d.h.

$$[R_3]_{j,Z_i} = [R_6]_{j,z_{i,1}} + [R_6]_{j,z_{i,2}} + [R_6]_{j,z_{i,3}} + [R_6]_{j,z_{i,4}}.$$

Zwischen N_3 und N_6:
Schneidet der j-ten Strahl eine der Zellen $z_{i,1}, z_{i,2}, z_{i,3}, z_{i,4}$, so schneidet der Strahl auch Z_i. Damit gilt

$$[N_3]_{j,Z_i} = \begin{cases} 1 & : \text{falls } [N_6]_{j,z_{i,1}} = 1 \text{ oder } [N_6]_{j,z_{i,2}} = 1 \text{ oder } [N_6]_{j,z_{i,3}} = 1 \text{ oder } [N_6]_{j,z_{i,4}} = 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

e) Zuerst das Problem $N_3 x = 10 - I$. Es gilt

$$10 - I = (5, 7, 3, 9, 2, 4, 4, 9, 9, 8, 1, 4)^T.$$

Damit ist die Lösung des linearen Ausgleichsproblem

$$x = (-0.9015, 2.8258, 3.7652, 10.4924, -0.3409, -3.5076, -0.2348, 3.8258, 4.0985)^T$$

Nun zu $R_3 x = -\log\left(\frac{10}{I}\right)$. Es gilt:

$$-\log\left(\frac{10}{I}\right) = (1.93, 2.44, 1.59, 3.54, 1.46, 1.74, 1.74, 3.54, 3.54, 2.84, 1.34, 1.74)^T$$

Damit ist die Lösung des linearen Ausgleichsproblem

$$x = (0.1682, 1.4035, 1.1390, 3.1745, -0.2382, -0.6672, 0.3599, 1.2484, 1.4389)^T$$